



laboratoire de mécanique et d'acoustique

# Équations générales des milieux continus (mécanique et thermodynamique)

**Jean Garrigues**

<mailto:jean.garrigues@centrale-marseille.fr>

<http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr>

Jeudi 2 et jeudi 9 février 2017





## Au programme...

- Concepts fondamentaux : ▶
- Principe de la conservation de la masse : ▶
- Principes de Newton (mécanique classique) ▶
- Premier principe de la thermodynamique : ▶
- Second principe de la thermodynamique ▶
- Exemple : construction des fluides simples ▶
- Synthèse ▶



Domaines

Extensivité

Lemme  
fondamental

Première partie

# Concepts fondamentaux

# Domaines en MMC

## Domaine matériel

$\mathcal{D}^m$  : Ensemble de particules (*a priori* en mouvement).

Pas de flux de matière à travers la frontière.

En thermodynamique : « système fermé ».

### Notations :

position actuelle :  $\mathcal{D}_t^m$       frontière actuelle :  $\partial \mathcal{D}_t^m$

position de référence :  $\mathcal{D}_0^m$       frontière de référence :  $\partial \mathcal{D}_0^m$

## Domaine géométrique

$\mathcal{D}^g$  : Ensemble de points (traversé par un milieu continu).

De la matière traverse la frontière (*a priori* mobile).

En thermodynamique : « système ouvert ».

En mécanique des fluides : « volume de contrôle ».

### Notations :

Position actuelle :  $\mathcal{D}_t^g$       frontière actuelle :  $\partial \mathcal{D}_t^g$

(en méca des fluides, il est parfois sous-entendu que la frontière est fixe pour l'observateur utilisé)

# Extensivité

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine (matériel ou géométrique),  
 et une partition de  $\mathcal{D}$  :  $\mathcal{D} = \cup_{i=1}^n \mathcal{D}_i$  et  $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ )

## Grandeur extensive

$\Psi$  extensive :  $\Psi(\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n \Psi(\mathcal{D}_i)$  pour toute partition de  $\mathcal{D}$

## Théorème (Radon-Nicodym-Lebesgue)

$\Psi$  extensive  $\Rightarrow \exists \Psi^v(M)$  tel que  $\Psi(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \Psi^v(M) dv$

$\Psi^v$  : densité volumique de  $\Psi$ .

### Exemples :

- **grandeurs extensives** : volume, masse, énergie cinétique, quantité de mouvement ;
- **grandeurs non extensives** : température, pression, déformation.

# Dérivée en temps d'une grandeur extensive

**Rappel :** 
$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \Psi^v dv_t = \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial \Psi^v}{\partial t} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \Psi^v (\mathbf{v}^f \cdot \mathbf{n}_t) ds_t$$

Soit  $\Psi$  une grandeur extensive ( $\Psi^v$  existe)

**Pour un domaine matériel :** ( $\mathbf{v}^f = \mathbf{v}$ )

$$\Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t = \int_{\mathcal{D}_0^m} \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) dv_0$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\partial \Psi_E^v}{\partial t} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \Psi_E^v (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \frac{\partial \Psi_E^v}{\partial t} + \mathbf{div}_E(\Psi_E^v \otimes \mathbf{v}) \right) dv_t \quad (\Psi_E^v (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_t) = (\Psi_E^v \otimes \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t) \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^m} (\dot{\Psi}_E^v + \tau_{vE} \Psi_E^v) dv_t \quad (\tau_v = \text{div}_E \mathbf{v} : \text{taux de dilatation volumique}) \end{aligned}$$

**Pour un domaine géométrique :** ( $\mathbf{v}^f \neq \mathbf{v}$ )

$$\Psi(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t \quad (\text{pas de description de Lagrange possible})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{\partial \Psi_E^v}{\partial t} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v (\mathbf{v}_E^f \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \left( \frac{\partial \Psi_E^v}{\partial t} + \mathbf{div}_E(\Psi_E^v \otimes \mathbf{v}_E) \right) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v ((\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^g} (\dot{\Psi}_E^v + \tau_{vE} \Psi_E^v) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} (\Psi_E^v \otimes (\mathbf{v}_E^f - \mathbf{v}_E)) \cdot \mathbf{n}_t ds_t \quad (\text{éq. de bilan}) \end{aligned}$$

$\tau_{\Psi}$  : « taux » de production volumique actuel de  $\Psi$  dans le domaine ;

$\phi_{\Psi}$  : « flux convectif » de  $\Psi$  entrant à travers la frontière.

# Lemme fondamental

Soit  $\Psi^v(M)$  un champ défini dans  $\mathcal{E}_3$ .

## Théorème

$$\forall \mathcal{D}, \int_{\mathcal{D}} \Psi^v(M) \, dv = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \forall M, \Psi^v(M) = \mathbf{0}$$

(démonstration dans l'annexe A1 dans le pdf)

## Attention :

Ce théorème n'est applicable que si la définition  $\Psi^v(M)$  ne dépend pas du domaine  $\mathcal{D}$ .





Domaine  
matériel

Forme locale

Domaine  
géométrique

Densités  
massiques

En bref...

Seconde partie

## Conservation de la masse

# Conservation de la masse (domaine matériel)

La masse est une mesure de la quantité de matière.

## Physique classique

La masse est une grandeur scalaire, objective et extensive.

La masse actuelle d'un domaine matériel est :

$$m(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L K_{vL} \, dv_0$$

$\rho$  : masse volumique (densité volumique de masse, qu'on devrait noter  $m^v$ )

## Principe de la conservation de la masse

La masse d'un domaine matériel est invariante dans le temps.

**Écritures équivalentes :** (formules de la diapositive 6, avec  $\Psi = m$ )

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \, dv_t$$

$$0 = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \operatorname{div}_E(\rho \mathbf{v}) \right) dv_t \quad (\text{dérivée d'intégrale à domaine variable})$$

$$0 = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\dot{\rho}_E + \rho_E \tau_{vE}) \, dv_t$$

# Équation locale

La conservation de la masse est vraie pour tout domaine matériel :

$$\forall \mathcal{D}_t^m, \quad 0 = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\dot{\rho}_E + \rho_E \tau_{vE}) \, dv_t$$

Lemme fondamental  $\Rightarrow \frac{\dot{\rho}(P,t)}{\rho(P,t)} = -\tau_v(P,t)$  (équation de « continuité »)

**Intégration temporelle de  $t_0$  à  $t$  :** (pour les solides déformables)

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\tau_v = -\frac{\dot{K}_v}{K_v} \Rightarrow \rho = \frac{C}{K_v} \Rightarrow \rho_L(\mathbf{x}_0, t) = \frac{C}{K_{vL}(\mathbf{x}_0, t)}$$

Pour  $t = t_0$ ,  $\rho_L(\mathbf{x}_0, t_0) = \rho_0(\mathbf{x}_0)$  et  $K_{vL}(\mathbf{x}_0, t_0) = 1$ .

On a donc :  $C = \rho_0(\mathbf{x}_0)$

Forme locale intégrée temporellement :  $K_v(P, t) = \frac{\rho_0(P)}{\rho(P, t)}$

La conservation de la masse implique une relation entre la masse volumique actuelle  $\rho$  et la dilatation volumique actuelle  $K_v$ .

(dans une déformation de solide, la masse volumique évolue)

# Bilan de masse (domaine géométrique)

**Rappel :** (dérivée d'intégrale sur un domaine géométrique, bilan de  $\Psi$ , diapositive 6)

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v dv_t}_{\Psi(\mathcal{D}_t^g, t)} = \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{(\dot{\Psi}_E^v + \tau_{vE} \Psi_E^v)}_{\tau_\Psi} dv_t + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v ((\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t}_{\Phi_\Psi}$$

Pour  $\Psi = m$  ( $\Psi^v = \rho$ ) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} (\dot{\rho}_E + \tau_{vE} \rho_E) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E ((\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t$$

Équation de « continuité » :  $\dot{\rho}_E + \tau_{vE} \rho_E = 0$  ( $\Leftrightarrow \tau_m = 0$ )

Finalement :

$$\frac{d}{dt} m(\mathcal{D}_t^g, t) = - \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E ((\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t$$

La masse d'un domaine géométrique varie avec le temps. Sa dérivée temporelle est le débit massique entrant à travers la frontière.

# Densité massique d'une grandeur extensive

Soit  $\Psi$  une grandeur extensive. (rappel : on peut définir  $\Psi^v$ )

## Densité massique d'une grandeur extensive

$$\Psi^m = \frac{\Psi^v}{\rho} \quad (\text{unité : } [\Psi] \cdot \text{kg}^{-1})$$

### Relations :

$$\Psi(\mathcal{D}_t, t) = \int_{\mathcal{D}_t} \Psi_E^v dv_t = \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \Psi_E^m dv_t = \int_{\mathcal{D}_t} \Psi_E^m dm \quad \text{où} \quad dm = \rho dv_t$$

### Dérivées temporelles d'intégrales de masse :

(en tenant compte de la conservation de la masse)

- Pour un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  :

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}_t^m, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \Psi_E^m dm = \dots = \int_{\mathcal{D}_t^m} \dot{\Psi}_E^m dm$$

- Pour un domaine géométrique  $\mathcal{D}^g$  :

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}_t^g, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^m dm = \dots = \int_{\mathcal{D}_t^g} \dot{\Psi}_E^m dm + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \Psi_E^m ((\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t}_{\Phi_\Psi}$$

## En bref...

- La masse est une grandeur scalaire extensive et objective qui mesure la quantité de matière.
- **Principe** : la masse d'un domaine matériel est invariante dans le temps.
- **Équation locale** :  $\dot{\rho} = -\tau_v$  (équation dite « de continuité »)
- **Équation locale intégrée en temps** :  $\frac{\rho_0}{\rho} = K_v$
- La masse d'un domaine géométrique est variable dans le temps.
- La dérivée temporelle des intégrales de masse est d'expression plus simple que celle des intégrales de volume.

Domaine matériel

Forme locale

Domaine géométrique

Densités massiques

En bref...



Rappels

Forces  
extérieures

Forces  
intérieures

Théorèmes  
généraux  
(dom. mat.)

Équations  
locales

Théorèmes  
généraux  
(dom. géo.)

Formulation  
intégrale

Changements  
d'observateur

En bref...

Troisième partie

# Principe fondamental de la mécanique

# Rappels de mécanique newtonienne

## Deux principes :

### 1. Loi de mouvement pour un point matériel

$$\mathbf{f}_{ext} = m\boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\gamma} : \text{accélération pour un observateur galiléen}$$

### 2. Interactions de Newton entre points matériels

$$\forall i \neq j, \quad \mathbf{F}_{P_i/P_j} = -\mathbf{F}_{P_j/P_i} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{P_i/P_j} \wedge (\mathbf{x}_t^{P_i} - \mathbf{x}_t^{P_j}) = \mathbf{0}$$

(la nature, le sens et l'intensité de la force d'interaction ne sont pas précisés)

## Conséquences de ces deux principes (rappel) :

Trois théorèmes généraux sur les **systèmes matériels** :

- Théorème de la résultante dynamique :  $\mathbf{R}_{dyn} = \mathbf{R}_{ext}$
- Théorème du moment dynamique :  $\mathbf{M}_{dyn O} = \mathbf{M}_{ext O}$
- Théorème de la puissance cinétique :  $\frac{d}{dt} E_{cin} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec}$
- **Corollaire** : la résultante et le moment résultant des **efforts intérieurs** à un système matériel sont nuls.

# Forces extérieures sur un domaine matériel

## 1. Forces extérieures à distance (gravitation, électrostatique, etc.)

- elles agissent sur toutes les particules  $P$  de  $\mathcal{D}^m$
  - notation :  $\mathbf{f}_{ext}^v(P, t)$  (champ matériel de forces volumiques,  $\text{N.m}^{-3}$ )
- OU  $\mathbf{f}_{ext}^m(P, t) = \rho^{-1} \mathbf{f}_{ext}^v$  (champ matériel de forces massiques,  $\text{N.kg}^{-1} = \text{m.s}^{-2}$ )

$$\mathbf{R}_{ext}^{dist} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{f}_{extE}^v dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{f}_{extE}^m dm$$

$$\mathbf{M}_{extO}^{dist} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{extE}^v dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{extE}^m dm$$

## 2. Forces extérieures de contact (objets, parois, pressions, etc.)

- elles agissent sur les particules  $P'$  de la frontière  $\partial \mathcal{D}^m$
- notation :  $\mathbf{f}_{ext}^s(P', t)$  (champ matériel de forces surfaciques,  $\text{N.m}^{-2}$ )

$$\mathbf{R}_{ext}^{cont} = \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{f}_{extE}^s ds_t \quad \mathbf{M}_{extO}^{cont} = \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{extE}^s ds_t$$

## Bilan des actions extérieures sur un domaine matériel :

$$\mathbf{R}_{ext} = \mathbf{R}_{ext}^{dist} + \mathbf{R}_{ext}^{cont} \quad \mathbf{M}_{extO} = \mathbf{M}_{extO}^{dist} + \mathbf{M}_{extO}^{cont}$$

## Efforts intérieurs dans un milieu continu

Soit  $\mathcal{D}_t^m$  la position actuelle d'un domaine matériel.

Soit  $\mathcal{D}_i^m \subset \mathcal{D}_t^m$  un sous-domaine.

$$\text{ext}(\mathcal{D}_i^m) = (\mathcal{D}_t^m - \mathcal{D}_i^m) \cup \text{ext}(\mathcal{D}_t^m) \quad (\text{partition de } \text{ext}(\mathcal{D}_i^m))$$

Les actions mécaniques de  $(\mathcal{D}_t^m - \mathcal{D}_i^m)$  sur  $\mathcal{D}_i^m$  sont extérieures au sous-domaine  $\mathcal{D}_i^m$ , mais intérieures à  $\mathcal{D}_t^m$ .

Forces extérieures sur le sous-domaine  $\mathcal{D}_i^m$  :

- forces extérieures à distance :

$$\mathbf{f}_{\mathcal{D}_i^m}^v = \mathbf{f}_{(\mathcal{D}_t^m - \mathcal{D}_i^m)/\mathcal{D}_i^m}^v + \mathbf{f}_{\text{ext}(\mathcal{D}_t^m)/\mathcal{D}_i^m}^v \quad (\text{N.m}^{-3})$$

- forces extérieures de contact : (sur la frontière  $\partial \mathcal{D}_i^m$ )

$$\mathbf{f}_{\partial \mathcal{D}_i^m}^s \quad (\text{N.m}^{-2})$$

Contrainte actuelle sur la frontière  $\partial \mathcal{D}_i^m$  (intérieure à  $\mathcal{D}_t^m$ )

C'est la densité surfacique de force de contact :  $\mathbf{c} = \mathbf{f}_{\partial \mathcal{D}_i^m}^s$ .

# Tenseur des contraintes

## 1. Théorème (« Hypothèse de Cauchy »)

Tous les sous-domaines  $\mathcal{D}_i^m$  dont la frontière contient la particule  $P$  et qui ont la même normale extérieure en  $P$  ont la même contrainte  $\mathbf{c}$ .

(démonstration dans l'annexe A2 du pdf)

La contrainte actuelle  $\mathbf{c}$  ne dépend donc que de la particule  $P$  et de la facette de normale  $\mathbf{n}_t$ .  $\exists \mathbf{f}_c$  tel que  $(P, \mathbf{n}_t, t) \rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{f}_c(P, \mathbf{n}_t, t)$

## 2. Existence du tenseur des contraintes

$$\exists \boldsymbol{\sigma}(P, t) \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2} \text{ tel que } \mathbf{f}_c(P, \mathbf{n}_t, t) = \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t(P, t)$$

(démonstration dans l'annexe A3 du pdf)

La démonstration prouve l'existence du champ matériel  $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$ , sans en donner la valeur. (on peut en donner une description de Lagrange ou d'Euler)

## Condition aux limites en contraintes sur $\partial \mathcal{D}_t^m$

$$\forall P' \in \partial \mathcal{D}_t^m, \quad \boldsymbol{\sigma}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t(P', t) = \mathbf{f}_{ext}^s(P', t)$$



Rappels

Forces  
extérieuresForces  
intérieuresThéorèmes  
généraux  
(dom. mat.)Équations  
localesThéorèmes  
généraux  
(dom. géo.)Formulation  
intégraleChangements  
d'observateur

En bref...

# Décomposition des contraintes

Soient une particule  $P$ ,

et une facette matérielle en  $P$  de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$ .

La contrainte actuelle sur la facette matérielle est :

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t$$

**Contrainte normale (scalaire) en  $P$  pour la facette  $\mathbf{n}_t$**

$$c_N = \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{c} = \mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t = \boldsymbol{\sigma}(P, t) : (\mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t) = \boldsymbol{\sigma}(P, t) : \mathbf{N}_t$$

si  $c_N > 0$  : contrainte normale de *traction* ;

si  $c_N < 0$  : contrainte normale de *compression* ;

**Contrainte tangentielle (vecteur) en  $P$  pour la facette  $\mathbf{n}_t$**

$$\mathbf{c}_T = \mathbf{c} - c_N \mathbf{n}_t \quad (\mathbf{c}_T \text{ est un vecteur de la facette matérielle})$$

On a donc :  $\mathbf{c} = c_N \mathbf{n}_t + \mathbf{c}_T$  et  $\|\mathbf{c}\|^2 = c_N^2 + \|\mathbf{c}_T\|^2$  (scalaires)

(contrairement au scalaire  $c_N$ , le vecteur contrainte tangentielle  $\mathbf{c}_T$  est sensible au sens de  $\mathbf{n}_t$ )



Rappels

Forces  
extérieuresForces  
intérieuresThéorèmes  
généraux  
(dom. mat.)Équations  
localesThéorèmes  
généraux  
(dom. géo.)Formulation  
intégraleChangements  
d'observateur

En bref...

# Théorèmes généraux (pour un domaine matériel)

Rappel du corollaire :  $\int_{\mathcal{Q}_t^m} \mathbf{f}_{intE}^v dv_t = \mathbf{0}$  et  $\int_{\mathcal{Q}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{intE}^v dv_t = \mathbf{0}$

Théorème de la résultante dynamique :  $\mathbf{R}_{dyn} = \mathbf{R}_{ext}$

$$\mathbf{R}_{dyn} = \int_{\mathcal{Q}_t^m} \boldsymbol{\gamma}_E dm = \int_{\mathcal{Q}_t^m} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E dv_t$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ext} &= \int_{\mathcal{Q}_t^m} \mathbf{f}_{extE}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{Q}_t^m} \mathbf{f}_{extE}^s ds_t = \int_{\mathcal{Q}_t^m} (\mathbf{f}_{extE}^v + \mathbf{f}_{intE}^v) dv_t + \int_{\partial \mathcal{Q}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t \\ &= \int_{\mathcal{Q}_t^m} (\mathbf{f}_{0E}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) dv_t \quad (\mathbf{f}_0^v : \text{force vol. à distance de tout l'univers sur la particule}) \end{aligned}$$

Théorème du moment dynamique :  $\mathbf{M}_{dynO} = \mathbf{M}_{extO}$

$$\mathbf{M}_{dynO} = \int_{\mathcal{Q}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E dm = \int_{\mathcal{Q}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E dv_t$$

$$\mathbf{M}_{extO} = \int_{\mathcal{Q}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{extE}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{Q}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{extE}^s ds_t = \dots = \int_{\mathcal{Q}_t^m} (\mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}_{0E}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_E) dv_t$$

Th. de la puissance cinétique :  $\frac{d}{dt} E_{cin} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec}$

$$\frac{d}{dt} E_{cin} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{Q}_t^m} \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dm = \dots = \int_{\mathcal{Q}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv_t$$

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} = \int_{\mathcal{Q}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{extE}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{Q}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{extE}^s ds_t = \dots$$

$$= \int_{\mathcal{Q}_t^m} (\mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_{0E} - \mathbf{f}_{intE}^v)) dv_t + \int_{\mathcal{Q}_t^m} (\mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{v}) dv_t$$

Rappels

Forces  
extérieuresForces  
intérieuresThéorèmes  
généraux  
(dom. mat.)Équations  
localesThéorèmes  
généraux  
(dom. géo.)Formulation  
intégraleChangements  
d'observateur

En bref...

## Équations différentielles locales

## Rappel du lemme fondamental

$$\forall \mathcal{D}, \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\Psi}^v(M) \, dv = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \quad \boldsymbol{\Psi}^v(M) = \mathbf{0}$$

## Conséquence du th. de la résultante dynamique

$$\forall \mathcal{D}_t^m, \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\mathbf{f}_{0E}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) \, dv_t$$

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{f}_0^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{équation de mouvement})$$

## Conséquence du th. du moment dynamique

$$\forall \mathcal{D}_t^m, \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}_{0E}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_E) \, dv_t$$

$$\mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} \text{ est symétrique.}$$

## Conséquence du th. de la puissance cinétique

$$\forall \mathcal{D}_t^m, \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_{0E}^v - \mathbf{f}_{intE}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{v}) \, dv_t + \mathcal{P}_{int}^{mec}$$

$$\mathcal{P}_{int}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^m} -\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \, dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{intE}^v \, dv_t$$

$$\mathcal{P}_{int}^{vcont} = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad \mathcal{P}_{int}^{vdist} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^v \quad (\text{W.m}^{-3})$$

$$\mathcal{P}_{int}^{mec} = \mathcal{P}_{int}^{cont} + \mathcal{P}_{int}^{dist} \text{ est une grandeur extensive.}$$

(dans la littérature, la puissance des efforts intérieurs à distance est généralement négligée)

Rappels

Forces  
extérieuresForces  
intérieuresThéorèmes  
généraux  
(dom. mat.)Équations  
localesThéorèmes  
généraux  
(dom. géo.)Formulation  
intégraleChangements  
d'observateur

En bref...

# Théorèmes généraux (pour un domaine géométrique)

## Théorème des résultantes

$$\int_{\mathcal{D}_t^s} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^s} \mathbf{f}_{ext E}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \mathbf{f}_{ext E}^s ds_t$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^s} \rho_E \mathbf{v}_E dv_t = - \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \rho_E \mathbf{v}_E ((\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t + \int_{\mathcal{D}_t^s} \mathbf{f}_{ext E}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \mathbf{f}_{ext E}^s ds_t$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_m = \Phi_{\mathbf{Q}_m} + \mathbf{R}_{ext} \quad (\text{« conservation » ou bilan de la quantité de mouvement } \mathbf{Q}_m)$$

## Théorème des moments

$$\int_{\mathcal{D}_t^s} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^s} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{ext E}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{ext E}^s ds_t$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{cin O} = \Phi_{\mathbf{M}_{cin O}} + \mathbf{M}_{ext O} \quad (\text{« conservation » ou bilan du moment cinétique } \mathbf{M}_{cin})$$

## Théorème de la puissance cinétique

$$\int_{\mathcal{D}_t^s} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^s} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{ext E}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{ext E}^s ds_t + \mathcal{P}_{int}^{mec}$$

$$\frac{d}{dt} E_{cin} = \Phi_{E_{cin}} + \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec} \quad (\text{« conservation » ou bilan de l'énergie cinétique } E_{cin})$$

Rappel : « flux convectif » de  $\Psi$  entrant à travers la frontière :

$$\Phi_{\Psi} = \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \Psi_E^v \otimes (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t$$

Rappels

Forces  
extérieuresForces  
intérieuresThéorèmes  
généraux  
(dom. mat.)Équations  
localesThéorèmes  
généraux  
(dom. géo.)Formulation  
intégraleChangements  
d'observateur

En bref...

# Formulation intégrale (de l'équation de mouvement)

## Équation scalaire équivalente à l'équation de mouvement

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{f}_0^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{égalité vectorielle}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbb{H}(\mathcal{D}_t), \quad \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_{0E}^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_E^s \, ds_t - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{sym grad}_E \mathbf{w} \, dv_t$$

Équation scalaire équivalente (utile dans certaines méthodes numériques).

## Terminologies (rencontrées dans la littérature)

- le champ vectoriel arbitraire  $\mathbf{w}$  :
  - fonction test, fonction de pondération,
  - déplacement virtuel ( $\delta \mathbf{u}$ ), vitesse virtuelle ( $\mathbf{v}^*$ ).
- l'équation scalaire équivalente :
  - formulation intégrale, formulation variationnelle, formulation faible (*weak formulation*),
  - théorème (ou principe) des travaux virtuels, théorème (ou principe) des puissances virtuelles ;

## Remarque

En **thermomécanique**, cette formulation intégrale est incomplète !

Rappels

Forces  
extérieuresForces  
intérieuresThéorèmes  
généraux  
(dom. mat.)Équations  
localesThéorèmes  
généraux  
(dom. géo.)Formulation  
intégraleChangements  
d'observateur

En bref...

# Changements d'observateur

## Principe

Les forces surfaciques extérieures de contact  $\mathbf{f}_{ext}^S$  sont des grandeurs vectorielles objectives.

**Conséquences :** (démonstrations dans le pdf)

- Le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est objectif.
- Sa divergence eulérienne  $\mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}$  est un vecteur objectif.
- La puissance des efforts intérieurs  $\mathcal{P}_{int}^{mec} = \mathcal{P}_{int}^{cont} + \mathcal{P}_{int}^{dist}$  et sa densité volumique  $-\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^V$  sont des scalaires objectifs.
- La puissance des efforts extérieurs à distance et de contact  $\mathcal{P}_{ext}^{cont}$  et  $\mathcal{P}_{ext}^{dist}$  sont des scalaires non objectifs.
- La puissance cinétique  $\mathcal{P}_{cin}$  est un scalaire non objectif.

**Remarque :** réécriture du théorème de la puissance cinétique

$$\underbrace{\mathcal{P}_{int}^{mec}}_{\text{obj.}} = \underbrace{\mathcal{P}_{cin}}_{\text{non obj.}} - \underbrace{\mathcal{P}_{ext}^{mec}}_{\text{non obj.}}$$

## En bref...

- Il existe un tenseur des contraintes objectif tel que la contrainte (effort surfacique intérieur de contact) sur une facette matérielle de direction actuelle  $\mathbf{n}_t$  est :

$$\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t) = \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t$$

- Condition aux limites en contraintes :  
si la facette matérielle de normale  $\mathbf{n}_t$  est sur la frontière,

$$\boldsymbol{\sigma}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t(P') = \mathbf{f}_{ext}^s(P', t)$$

- Conséquences des trois théorèmes généraux :

- 1 Équation de mouvement :  $\mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0^v = \rho \boldsymbol{\gamma}$

- 2 Symétrie du tenseur des contraintes.

- 3 Puissance actuelle des efforts intérieurs :

$$\mathcal{P}_{int}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t} -\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \, dv_t + \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{int}^v \, dv_t \quad (\text{W})$$

$$\mathcal{P}_{int}^{vmec} = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^v \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-3})$$

Rappels

Forces  
extérieuresForces  
intérieuresThéorèmes  
généraux  
(dom. mat.)Équations  
localesThéorèmes  
généraux  
(dom. géo.)Formulation  
intégraleChangements  
d'observateur

En bref...



Concepts de base

1<sup>er</sup> principe (dom. mat.)

Équation locale

1<sup>er</sup> principe (dom. géo.)

Changements d'observateur

En bref...

Quatrième partie

# Premier principe de la thermodynamique

# Variables d'état

## Système thermodynamique

Domaine matériel (système « fermé ») ou géométrique (système « ouvert ») modélisé par un milieu continu (éventuellement par morceaux).

## Variables d'état

Liste de champs matériels objectifs nécessaires et suffisants pour définir l'état actuel du système. (ces champs sont donc « indépendants »)

Le choix de la liste des variables d'état est la première étape de la modélisation du comportement du système thermodynamique.

## Exemples :

- Fluide simple :  $\{T, \rho\}$  ( $T$  : température,  $\rho$  : masse volumique)
- Solide déformable isotrope :  $\{T, \mathbf{X}\}$  ( $\mathbf{X}$  : un tenseur de déformation objectif)
- Solide déformable anisotrope :  $\{T, \mathbf{X}, \{N_i^\bullet\}\}$  ( $N_i^\bullet$  : dir. act. d'anisotropie)
- Solide déf. (isotrope ou non) « à mémoire » :  $\{T, \mathbf{X}, \{N_i^\bullet\}, \{\alpha_i^\bullet\}\}$   
 $\{\alpha_i^\bullet\}$  : variables d'état mnésiques  
 (autres terminologies : « internes », « non observables », « cachées », « non mesurables »)

# Fonctions d'état

## Fonction d'état

Champ matériel objectif  $\chi'$  déterminé par les seules variables d'état (« indépendantes ») :  $\chi'(P, t) = f_{\chi'}(\chi_1(P, t), \dots, \chi_n(P, t))$

(toute fonction de variables d'état et de fonctions d'état est une fonction d'état !)

**Dérivée particulière :**  $\dot{\chi}' = \sum_i \partial_i f_{\chi'} \bar{\otimes}^{p_i} \dot{\chi}_i$  (non objective si  $\chi'$  non scalaire)

**Cas particulier :** si  $\chi'$  et  $\{\chi_\bullet\}$  sont scalaires,  $\dot{\chi}' = \sum_i \partial_i f_{\chi'} \dot{\chi}_i$  (objective)

## Théorème

Si les variables d'état  $\{\chi_\bullet\}$  et la fonction d'état scalaire  $\chi'$  sont objectives, la fonction d'état  $f_{\chi'}(\chi_\bullet)$  est une fonction isotrope.

### Démonstration :

Objectivité de  $\chi'$  (scalaire) :  $\tilde{\chi}' = \chi'$

Définition universelle de  $\chi'$  :  $f_{\chi'}(\tilde{\chi}_\bullet) = f_{\chi'}(\chi_\bullet)$

Objectivité des  $\chi_\bullet$  :  $\forall \mathcal{Q}_t, f_{\chi'}(\mathcal{R}_{\mathcal{Q}_t}(\chi_\bullet)) = f_{\chi'}(\chi_\bullet) \Rightarrow f_{\chi'}$  est isotrope.

# Espace des états, évolution

$f_{\chi'}$  isotrope  $\Rightarrow \exists \bar{f}_{\chi'}$  tel que :  $f_{\chi'}(\boldsymbol{\chi}_{\bullet}) = \bar{f}_{\chi'}(I_1, \dots, I_m)$  ( $I_{\bullet} \in \mathbb{V}^{\otimes 0}$ )

Toute fonction d'état scalaire objective  $\chi' = f_{\chi'}(\boldsymbol{\chi}_{\bullet})$  où les variables d'état  $\{\boldsymbol{\chi}_{\bullet}\}$  sont objectives, se ramène à une fonction scalaire  $\bar{f}_{\chi'}$  de  $m$  variables d'état scalaires  $\{I_{\bullet}\}$ . ( $\{I_{\bullet}\}$  : variables d'état dites « réduites »)

## Espace des états

Tout état de particule est représenté par un point  $\{I_1, \dots, I_m\}$  de  $\mathbb{R}^m$ .

## Évolution thermodynamique d'une particule

Chemin dans  $\mathbb{R}^m$  paramétré par le temps  $\{I_1(P, t), I_2(P, t), \dots\}$ .

## Vitesse d'évolution thermodynamique d'une particule

Vecteur de  $\mathbb{R}^m$  de composantes  $\{\dot{I}_1(P, t), \dots, \dot{I}_m(P, t)\}$ .

Remarque : les  $\{\dot{I}_{\bullet}\}$  ne sont pas nécessairement indépendants.



Concepts de base

1<sup>er</sup> principe (dom. mat.)

Équation locale

1<sup>er</sup> principe (dom. géo.)

Changements d'observateur

En bref...

# Résumé des concepts de base

- **Variables d'état** : liste de champs matériels  $\{\chi_{\bullet}(P, t)\}$  objectifs, choisie pour définir l'état actuel d'un système matériel.
- **Fonction d'état** : sa valeur est déterminée par les seules variables d'état :  $\chi' = f_{\chi'}(\chi_{\bullet})$  ( $f_{\chi'}$  : définition universelle)
- **Le cas utile** : si la fonction d'état  $\chi'$  est scalaire objective les variables d'état (*a priori* tensorielles) étant objectives, alors :  $f_{\chi'}$  est isotrope  $\Rightarrow \exists \{I_{\bullet}\}$  scalaires tel que  $\chi' = \bar{f}_{\chi'}(I_1, \dots, I_m)$  (on réduit les variables d'état tensorielles  $\{\chi_{\bullet}\}$  à  $m$  scalaires  $\{I_{\bullet}\}$  indépendants)
- **Espace des états** : un état de particule est un point de  $\mathbb{R}^m$ .
- **Évolution thermodynamique d'une particule** : chemin dans l'espace des états, paramétré par le temps.
- **Vitesse d'évolution thermodynamique d'une particule** : vecteur de  $\mathbb{R}^m$ , de composantes  $\{I_1, \dots, I_m\}$  (pas toujours indépendants !)

On peut maintenant écrire les deux principes de la thermodynamique.

Concepts de base

1<sup>er</sup> principe (dom. mat.)

Équation locale

1<sup>er</sup> principe (dom. géo.)

Changements d'observateur

En bref...

# 1<sup>er</sup> principe thermodynamique (domaine matériel)

**Énoncé classique :** (évolution finie d'un domaine matériel)

- ①  $\exists$  une énergie interne telle que l'énergie se conserve :

$$\underbrace{(E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1))}_{\text{var. énerg. cinétique}} + \underbrace{(E_{int}(t_2) - E_{int}(t_1))}_{\text{var. énerg. interne}} = \underbrace{W_{t_1}^{t_2}}_{\text{trav. reçu}} + \underbrace{Q_{t_1}^{t_2}}_{\text{chal. reçue}}$$

L'énergie reçue sert à modifier le mouvement et l'énergie interne.  
(pas besoin d'« équilibre(s) » !)

- ② L'énergie interne est une fonction d'état objective et extensive :

$$E_{int}(\mathcal{D}_t^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} e_E^m \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E e_E^m \, dv_t \quad \left( = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L e_L^m K_{vL} \, dv_0 \right)$$

**Énoncé « instantané » :** (la conservation de l'énergie est vraie à tout instant)

$$\frac{d}{dt} E_{cin} + \frac{d}{dt} E_{int} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{cal} \quad (\text{bilan d'énergie « entre } t \text{ et } t+dt \text{ »})$$

## Modèle de milieu continu

- ① Choix des variables d'état  $\{I_1, \dots, I_m\}$  (physiquement significatives)
- ② Expression de la fonction d'état  $\bar{f}_e$  :  $e^m = \bar{f}_e(I_1, \dots, I_m)$   
(elle doit refléter les expériences et respecter le second principe dans toute évolution)

# Équation de la chaleur

## Existence du vecteur courant de chaleur (démonstrations dans le pdf)

$$\exists \mathbf{q}(P, t) \text{ tel que } q^s(P, \mathbf{n}_t, t) = \mathbf{q}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t \quad (q^s : \text{W.m}^{-2} \text{ à travers une facette } \mathbf{n}_t)$$

## Condition thermique aux frontières

$$\forall P' \in \partial \mathcal{D}_t^m, \quad \mathbf{q}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t(P', t) = -q_{ext}^s(P', t) \quad (q_{ext}^s : \text{chaleur reçue})$$

## Cons. de l'énergie : (dom. matériel) $\frac{d}{dt} E_{cin} + \frac{d}{dt} E_{int} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{cal}$

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec} + \int_{\mathcal{D}_t^m} \dot{e}_E^m \, dm = \mathcal{P}_{ext}^{mec} - \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t + \int_{\mathcal{D}_t^m} r_E^v \, dv_t$$

$$\forall \mathcal{D}_t^m, \quad \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathcal{P}_{intE}^{vmec} \, dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \dot{e}_E^m \, dv_t = - \int_{\mathcal{D}_t^m} \text{div}_E \mathbf{q} \, dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^m} r_E^v \, dv_t$$

## Équation de la chaleur

$$\rho \dot{e}^m + \mathcal{P}_{int}^{vmec} = -\text{div}_E \mathbf{q} + r^v \quad (\text{conséquence du lemme fondamental})$$

$$\text{où } \dot{e}^m = \sum_{j=1}^m \partial_j \bar{f}_e \dot{I}_j \quad (\bar{f}_e(I_1, \dots, I_m) : \text{propre à chaque modèle de matériau})$$

1<sup>er</sup> principe thermodynamique (domaine géométrique)

Rappel :  $\rho \dot{e}^m = - \mathcal{P}_{int}^{vmec} - \text{div}_E \mathbf{q} + r^v$  (équation de la chaleur)

Soit un domaine géométrique  $\mathcal{D}^g$  :

$$\int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \dot{e}_E^m dv_t = - \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathcal{P}_{int E}^{vmec} dv_t - \int_{\mathcal{D}_t^g} \text{div}_E \mathbf{q} dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} r_E^v dv_t$$

... (dérivée d'intégrale de masse sur un domaine géométrique)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} e_E^m dm = - \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathcal{P}_{int E}^{vmec} dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} r_E^v dv_t$$

(« flux convectif » entrant :  $\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v \otimes (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t$ )  $+ \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E e_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t$

$$\frac{d}{dt} E_{int}(\mathcal{D}^g, t) = - \mathcal{P}_{int}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{cal} + \Phi_e \quad (\text{interpr. : bilan d'énergie interne})$$

Autre interprétation : (rencontrée dans la littérature)

$$\frac{d}{dt} E_{cin}(\mathcal{D}^g, t) = \mathcal{P}_{int}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \Phi_{E_{cin}} \quad (\text{mécanique : bilan d'énergie cinétique})$$

$$\frac{d}{dt} E_{int}(\mathcal{D}^g, t) = - \mathcal{P}_{int}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{cal} + \Phi_e \quad (\text{bilan d'énergie interne})$$

$$\frac{d}{dt} E_{tot}(\mathcal{D}^g, t) = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{cal} + \Phi_{E_{tot}} \quad (\text{bilan « d'énergie totale »})$$

Concepts de base

1<sup>er</sup> principe (dom. mat.)

Équation locale

1<sup>er</sup> principe (dom. géo.)

Changements d'observateur

En bref...

# Changements d'observateur

## Principe

Objectivité de la chaleur extérieure reçue à la frontière :

$$\forall \mathcal{R} \quad \forall \tilde{\mathcal{R}} \quad \forall P' \in \partial \mathcal{D}_t \quad \forall t, \quad \tilde{q}_{ext}^s(P', t) = q_{ext}^s(P', t) \quad (\text{W.m}^{-2})$$

**Conséquences :** (démonstrations dans le pdf)

- Le courant de chaleur  $\mathbf{q}$  est un champ vectoriel objectif.
- $\text{div}_E \mathbf{q}$  est un champ scalaire objectif.
- $r^\nu$  est un champ scalaire objectif.

**Remarques :**

- L'énergie cinétique  $E_{cin}$  n'est pas objective.
- Sa dérivée temporelle  $\frac{d}{dt} E_{cin}$  n'est pas objective.
- La puissance mécanique extérieure  $\mathcal{P}_{ext}^{mec}$  n'est pas objective.
- Conservation de l'énergie pour un domaine matériel :

$$\frac{d}{dt} E_{cin} + \frac{d}{dt} E_{int} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{cal} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{d}{dt} E_{int} - \mathcal{P}_{ext}^{cal}}_{\text{objectif}} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} - \frac{d}{dt} E_{cin}$$

## En bref...

- Premier principe de la thermodynamique :

- ① conservation de l'énergie pour un domaine matériel (via un postulat d'existence d'une énergie interne)
- ② l'énergie interne est une fonction d'état objective extensive (cette fonction d'état est particulière à chaque modèle)

- Forme locale : équation de la chaleur

$$\rho \dot{e}^m = -\mathcal{P}_{int}^{vmec} - \operatorname{div}_E \mathbf{q} + r_E^v \quad (\text{où } \mathcal{P}_{int}^{vmec} = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^v)$$

- Pour un domaine géométrique :

cons. énergie  $\Leftrightarrow$  bilan d'énergie interne (ou d'énergie totale)

- Modélisation d'un milieu continu :

- ① choix d'une liste de variables d'état objectives  $\{\boldsymbol{\chi}_\bullet\}$ ,
- ② réduction à une liste de  $m$  variables d'état scalaires  $\{I_\bullet\}$ ,
- ③ expression de l'énergie interne massique (fonction d'état) :

$$e^m = \bar{f}_e(I_1, \dots, I_m) \quad (\text{physiquement sensée et respectant le second principe})$$



Motivations

2<sup>e</sup> principe  
(dom. mat.)

Inéquation  
locale

2<sup>e</sup> principe  
(dom. géo.)

Changements  
d'observateur

Comportement  
thermique

Capacité  
thermique

En bref...

## Cinquième partie

# Second principe de la thermodynamique

# Motivations

- Tout modèle qui viole le second principe de la thermodynamique est physiquement absurde. (exemple : le mouvement perpétuel)
- Le second principe prouve la nécessité d'existence des lois de comportement (ainsi que leur nombre), et précise les conditions pour qu'elles soient thermodynamiquement admissibles.
- Les lois de comportement doivent satisfaire le second principe dans toute évolution possible.
  - on vérifiera que le modèle de comportement fluide newtonien classique est le modèle thermodynamiquement admissible de fluide le plus simple ;
  - on verra que certains modèles de comportement solides déformables classiques violent le second principe.

Écrire le second principe est donc un bon point de départ pour créer des modèles de comportement thermodynamiquement admissibles.

Motivations

2<sup>e</sup> principe  
(dom. mat.)Inéquation  
locale2<sup>e</sup> principe  
(dom. géo.)Changements  
d'observateurComportement  
thermiqueCapacité  
thermique

En bref...

# Second principe (pour un domaine matériel)

## Énoncé du principe :

- Il existe une température absolue  $T$ . (en Kelvin, K)  
 C'est une variable d'état positive, non extensive et objective.  
 La liste des variables d'état est donc  $\{T, \{\boldsymbol{\chi}_\bullet\}\}$  ou  $\{T, \{I_\bullet\}\}$ .
- Dans une conduction thermique, la chaleur va du chaud vers le froid :

$$\mathbf{q} \cdot (-\mathbf{grad}_E T) \geq 0 \quad (\mathbf{q} : \text{vecteur courant de chaleur en } \text{W} \cdot \text{m}^{-2})$$
- Entropie : chaleur (énergie thermique) rapportée à la température de la matière qui la détient. (unité :  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ )
- L'entropie est une fonction d'état scalaire, extensive et objective :

$$S(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} s_E^m \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E s_E^m \, dv_t \quad \left( = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L s_L^m K_L^v \, dv_0 \right)$$

$$s^m = f_s(T, \boldsymbol{\chi}_\bullet) = \bar{f}_s(T, I_2, \dots, I_m) \quad \dot{s}^m = \partial_T \bar{f}_s \dot{T} + \sum_{j=2}^m \partial_j \bar{f}_s \dot{I}_j$$
- « Taux » d'entropie :

$$\frac{d}{dt} S(\mathcal{D}^m, t) \geq \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{r_E^v}{T_E} \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \frac{q_{extE}^s}{T_E} \, ds_t}_{\text{taux d'entropie d'origine extérieure}}$$

Le taux d'entropie d'origine intérieure n'est pas précisé par le principe.  
 (mais il est nécessairement positif ou nul)

Motivations

2<sup>e</sup> principe  
(dom. mat.)Inéquation  
locale2<sup>e</sup> principe  
(dom. géo.)Changements  
d'observateurComportement  
thermiqueCapacité  
thermique

En bref...

# Commentaires

## Dissymétrie des échanges de chaleur par conduction :

La chaleur (énergie thermique) détenue par la matière à la température  $T$  ne peut être cédée par conduction qu'à de la matière à température  $< T$ . (l'entropie sert à « qualifier » la chaleur détenue dans la matière)

## Exemples de variations d'entropie d'origine interne :

- Un échange de chaleur interne par conduction, produit de l'entropie.

**Illustration :** soit  $\mathcal{D}^m = \mathcal{D}_1^m \cup \mathcal{D}_2^m$  avec  $\mathcal{D}^m$  thermiquement isolé.

$$\text{si } T_1 > T_2, \quad dS = dS_1 + dS_2 = -\frac{dQ}{T_1} + \frac{dQ}{T_2} = dQ \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0$$

- Il existe d'autres phénomènes internes à  $\mathcal{D}^m$  qui font varier l'entropie de  $\mathcal{D}^m$ . Ces phénomènes sont exothermiques ou endothermiques.

**Exemples :** frottement, changement de phase, réaction chimique.

- Pour les milieux continus monoconstituants, le seul processus interne est le frottement (exothermique).

Le second principe stipule que la production interne d'entropie est toujours non négative.

Motivations

2<sup>e</sup> principe  
(dom. mat.)Inéquation  
locale2<sup>e</sup> principe  
(dom. géo.)Changements  
d'observateurComportement  
thermiqueCapacité  
thermique

En bref...

## Inégalité locale, dissipation

$$\frac{d}{dt}S(\mathcal{D}^m, t) \geq \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{r_E^v}{T_E} dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \frac{q_{extE}^s}{T_E} ds_t \quad (\text{axiome 5})$$

$$\int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \dot{s}_E^m dv_t \geq \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{r_E^v}{T_E} dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \frac{\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t}{T_E} ds_t \quad (\text{condition thermique aux frontières})$$

$$\rho \dot{s}^m - \frac{r^v}{T} + \text{div}_E \frac{\mathbf{q}}{T} \geq 0 \quad (\text{théorème de la divergence et lemme fondamental})$$

$$\rho \dot{s}^m - \frac{r^v}{T} + \frac{\text{div}_E \mathbf{q}}{T} - \mathbf{q} \cdot \frac{\text{grad}_E T}{T^2} \geq 0 \quad (\text{identité d'analyse ; } W \cdot m^{-3} \cdot K^{-1})$$

## Dissipation (inégalité locale de l'axiome 5)

$$\Phi = \rho T \dot{s}^m - r^v + \text{div}_E \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad (\text{car } T > 0 ; W \cdot m^{-3})$$

Dans toute évolution, la dissipation (champ matériel) est non négative.

## Dissipation thermique

$$\Phi_{th} = \frac{\mathbf{q} \cdot (-\text{grad}_E T)}{T} \geq 0 \quad (\text{axiome 2 : la chaleur va du chaud vers le froid})$$

## Dissipation intrinsèque

$$\Phi_{int} = \Phi - \Phi_{th} = \rho T \dot{s}^m - r^v + \text{div}_E \mathbf{q}$$

Remarque :  $\Phi \geq 0 \Rightarrow \Phi_{int} \geq -\Phi_{th}$   $\Phi_{int}$  peut être négative !

Motivations

2<sup>e</sup> principe  
(dom. mat.)Inéquation  
locale2<sup>e</sup> principe  
(dom. géo.)Changements  
d'observateurComportement  
thermiqueCapacité  
thermique

En bref...

# Commentaires

$$\begin{aligned}\Phi &= \rho T \dot{s}^m - r^v + \operatorname{div}_E \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad (\text{rappel}) \\ &= \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) - \mathcal{P}_{int}^{vmec} - \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad (\text{cf. équation de la chaleur})\end{aligned}$$

**La dissipation actuelle en une particule  $\Phi(P, t)$  varie avec :**

- l'état actuel de la particule (rappel :  $\rho = \rho_0 K_V^{-1}$ ),
- la vitesse d'évolution thermodynamique actuelle de la particule ( $\dot{\lambda}_*$ ),
- la cinématique actuelle du mouvement ( $\mathbf{D}$  et certains  $\dot{\lambda}_*$ ),
- l'environnement thermique actuel de la particule ( $\operatorname{grad}_E T$ ).

**Second principe local :**  $\Phi \geq 0$  (axiome 5) et  $\Phi_{th} \geq 0$  (axiome 2)

**Changement de fonctions d'état :**  $\{e^m, s^m\} \rightarrow \{\psi^m, s^m\}$

## Énergie libre de Helmholtz

$$\psi^m = e^m - T s^m \quad (\text{fonction d'état, tradition en solides déformables})$$

Dans les équations, la fonction d'état  $e^m$  est remplacée par  $\psi^m + T s^m$ .

**Inégalité de Clausius-Duhem** (autre expression de la dissipation)

$$\Phi = \underbrace{-\rho(\psi^m + s^m \dot{T}) - \mathcal{P}_{int}^{vmec}}_{\Phi_{int}} + \underbrace{\frac{\mathbf{q} \cdot (-\operatorname{grad}_E T)}{T}}_{\Phi_{th}} \geq 0$$

Motivations

2<sup>e</sup> principe  
(dom. mat.)Inéquation  
locale2<sup>e</sup> principe  
(dom. géo.)Changements  
d'observateurComportement  
thermiqueCapacité  
thermique

En bref...

# Second principe (pour un domaine géométrique)

$$\Phi = \rho T \dot{s}^m - r^v + \operatorname{div}_E \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad (\text{rappel})$$

∴ (division par  $T$ , intégration sur  $\mathcal{D}_t^g$  et formule de dérivée d'intégrale)

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} s_E^m \, dm}_{\frac{d}{dt} S(\mathcal{D}^g, t)} \geq \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \left( \frac{r_E^v}{T_E} - \operatorname{div}_E \frac{\mathbf{q}_E}{T_E} \right) dv_t}_{\frac{d}{dt} S_{ext} \text{ (taux d'entropie extérieur)}} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E s_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t}_{\Phi_s \text{ (flux convectif entrant)}}$$

Pour un domaine géométrique, le bilan d'entropie prend en compte le flux convectif d'entropie traversant la frontière.

Motivations

2<sup>e</sup> principe  
(dom. mat.)Inéquation  
locale2<sup>e</sup> principe  
(dom. géo.)Changements  
d'observateurComportement  
thermiqueCapacité  
thermique

En bref...

# Changements d'observateur

## Théorème

Le gradient eulérien du champ de température  $\mathbf{grad}_E T$  est un champ vectoriel objectif.

## Théorème

La dissipation totale, la dissipation intrinsèque et la dissipation thermique sont des champs scalaires objectifs.

(démonstrations dans le pdf)



Motivations

2<sup>e</sup> principe  
(dom. mat.)

Inéquation  
locale

2<sup>e</sup> principe  
(dom. géo.)

Changements  
d'observateur

Comportement  
thermique

Capacité  
thermique

En bref...

# Loi de comportement thermique (nécessité d'existence)

**Rappel :**  $\forall \mathbf{grad}_E T, \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{grad}_E T) \geq 0$  dans toute évolution  
 $\Rightarrow \exists \mathbf{f}_q$  tel que  $\mathbf{q} = \mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T, \dots)$

L'axiome 2 implique la nécessité d'existence de la fonction  $\mathbf{f}_q$  (sans la préciser).

## Définition

La fonction  $\mathbf{f}_q$  est appelée loi de comportement thermique ou loi de conduction thermique.

## Exemples :

- loi de Fourier : on choisit  $\mathbf{q} = -\alpha \mathbf{grad}_E T$  avec  $\alpha \geq 0$

vérif. :  $\mathbf{q} \cdot (-\mathbf{grad}_E T) = -\alpha \mathbf{grad}_E T \cdot (-\mathbf{grad}_E T) = \alpha \|\mathbf{grad}_E T\|^2 \geq 0, \forall \mathbf{grad}_E T$

- une loi isotrope transverse : ( $\mathbf{n}_t$  : direction d'anisotropie)

$$\mathbf{q} = -\alpha_1(\dots) (\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{grad}_E T) \mathbf{n}_t - \alpha_2(\dots) (\mathbf{grad}_E T - (\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{grad}_E T) \mathbf{n}_t)$$

$\alpha_1(\dots) \geq 0$  : conductivité dans la direction d'anisotropie

avec  $\alpha_2(\dots) \geq 0$  : conductivité transverse

$(\dots)$  : vide ou  $(\mathbf{grad}_E T, T, \boldsymbol{\chi})$

Exercice : vérifier que cette loi est universelle si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont isotropes.



# Capacité thermique (capacité calorifique)

## Définition empirique traditionnelle

Chaleur nécessaire pour élever la température de 1 kg de matière de 1 K.

**Définition locale et instantanée :** (pour toute évolution non isotherme)

Puissances calorifiques volumiques ( $\text{W.m}^{-3}$ ) reçues par une particule :

$$\mathcal{P}_{ext}^{vcal} = r^v - \text{div}_E \mathbf{q} = \rho \dot{e}^m + \mathcal{P}_{int}^{vmec} \quad (\text{cf. équation de la chaleur})$$

$$\mathcal{P}_{int}^{vcal} = \Phi_{int} = \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) - \mathcal{P}_{int}^{vmec} \quad (\text{déf. de la dissipation intrinsèque})$$

$$\mathcal{P}_{ext}^{vcal} + \mathcal{P}_{int}^{vcal} = \rho T \dot{s}^m$$

## Capacité thermique locale actuelle en une particule

$$C = \frac{\mathcal{P}_{ext}^{vcal} + \mathcal{P}_{int}^{vcal}}{\rho \dot{T}} = \frac{T}{\dot{T}} \dot{s}^m = T \partial_T f_s + T \sum_{j=2}^m \partial_j f_s \frac{\dot{I}_j}{\dot{T}} \quad (\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1})$$

La capacité thermique locale actuelle  $C$  dépend de la direction de la vitesse d'évolution thermodynamique dans l'espace des états.

En particulier, elle n'est pas définie pour les évolutions isothermes ( $\dot{T} = 0$ )

Motivations

2<sup>e</sup> principe  
(dom. mat.)Inéquation  
locale2<sup>e</sup> principe  
(dom. géo.)Changements  
d'observateurComportement  
thermiqueCapacité  
thermique

En bref...

## En bref...

- **Second principe local** :  $\Phi \geq 0$  et  $\Phi_{th} \geq 0$  ( $\Rightarrow \Phi_{int} \geq -\Phi_{th}$ )  
pour toute vitesse d'évolution possible à partir de tout état.
- **Pour les milieux continus monoconstituants**,  
(pas de changement de phase, pas de réaction chimique)  
le seul processus interne de production d'entropie est le frottement (exothermique). On a donc  $\Phi_{int} \geq 0$ .
- L'inégalité  $\Phi_{th} \geq 0$  implique l'existence d'une loi de comportement thermique.
- L'inégalité  $\Phi \geq 0$  impliquera l'existence d'une loi de comportement mécanique (et éventuellement de lois d'évolution) quand les variables d'état  $\chi_\bullet$  du modèle seront choisies.
- Les lois de comportement (thermique, mécanique, évolution) doivent être choisies telles que les deux inégalités  
$$\Phi \geq 0 \text{ et } \Phi_{th} \geq 0$$
soient vraies pour toute vitesse d'évolution possible de tout état.  
Ainsi, ces lois seront thermodynamiquement admissibles.

Motivations

2<sup>e</sup> principe  
(dom. mat.)Inéquation  
locale2<sup>e</sup> principe  
(dom. géo.)Changements  
d'observateurComportement  
thermiqueCapacité  
thermique

En bref...



Définition

Relation de Helmholtz

Comportement mécanique

Comportement thermique

Fluides newtoniens

Exemples de fluides

Sixième partie

## Construction des fluides simples

# Fluide simple

**Définition :** deux variables d'état  $\{T, \rho\}$  (espace des états :  $\mathbb{R}^2$ )

**Fonctions d'état :**

$$e^m = f_e(T, \rho) \quad \dot{e}^m = \partial_{Tf_e} \dot{T} + \partial_{\rho f_e} \dot{\rho}$$

$$s^m = f_s(T, \rho) \quad \dot{s}^m = \partial_{Tf_s} \dot{T} + \partial_{\rho f_s} \dot{\rho}$$

(les fonctions d'état  $f_e$  et  $f_s$  sont caractéristiques de chaque fluide simple)

**Dissipation :** (rappel :  $\Phi = \rho(T\dot{s}^m - \dot{e}^m) - \mathcal{P}_{int}^{vmec} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}_E T}{T} \geq 0$ )

$$\Phi = \rho(T \partial_{Tf_s} - \partial_{Tf_e}) \dot{T} + \rho(T \partial_{\rho f_s} - \partial_{\rho f_e}) \dot{\rho} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}_E T}{T} \geq 0$$

$$\dots \quad \left( \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\text{tr} \mathbf{D} ; \mathbf{D} = \frac{\text{tr} \mathbf{D}}{3} \mathbf{G} + \text{dev} \mathbf{D} ; \boldsymbol{\sigma} = \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} \mathbf{G} + \text{dev} \boldsymbol{\sigma} \right)$$

$$\rho(T \partial_{Tf_s} - \partial_{Tf_e}) \dot{T} - \rho^2(T \partial_{\rho f_s} - \partial_{\rho f_e} - \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2}) \text{tr} \mathbf{D} + \text{dev} \boldsymbol{\sigma} : \text{dev} \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad}_E T}{T} \geq 0$$

On pose :  $\mathbf{x} = \{ \rho(T \partial_{Tf_s} - \partial_{Tf_e}), -\rho^2(T \partial_{\rho f_s} - \partial_{\rho f_e} - \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2}), \text{dev} \boldsymbol{\sigma}, -\frac{\mathbf{q}}{T} \}$

$$\mathbf{y} = \{ \dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T \}$$

Alors :  $\Phi = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \exists \mathbf{f} \text{ tel que } \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \dots)$

$$x_1 = f_1(\mathbf{y}, \dots) \Leftrightarrow \rho(T \partial_{Tf_s} - \partial_{Tf_e}) = f_1(\dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$$

$$x_2 = f_2(\mathbf{y}, \dots) \Leftrightarrow -\rho^2(T \partial_{\rho f_s} - \partial_{\rho f_e} - \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2}) = f_2(\dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$$

$$x_3 = f_3(\mathbf{y}, \dots) \Leftrightarrow \text{dev} \boldsymbol{\sigma} = f_3(\dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$$

$$x_4 = f_4(\mathbf{y}, \dots) \Leftrightarrow -\frac{\mathbf{q}}{T} = f_4(\dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$$

Définition

Relation de  
HelmholtzComportement  
mécaniqueComportement  
thermiqueFluides  
newtoniensExemples de  
fluides

# Relation de Helmholtz

Équation 1 : 
$$\underbrace{\rho (T \partial_T f_s - \partial_T f_e)}_{\text{fonction d'état}} = f_1(\dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$$

$$= f_1(T, \rho)$$

Dissipation : (rappel)

$$f_1(T, \rho) \dot{T} + f_2 \text{tr} \mathbf{D} + f_3 : \text{dev} \mathbf{D} + f_4 \cdot \text{grad}_E T \geq 0, \quad \forall \dot{T} \forall \text{tr} \mathbf{D} \forall \text{dev} \mathbf{D} \forall \text{grad}_E T$$

$f_1$  n'est pas fonction de  $\dot{T}$  et  $\Phi \geq 0 \forall \dot{T} \Rightarrow f_1 = 0$

## Relation de Helmholtz

Dans un fluide simple,  $T \partial_T f_s - \partial_T f_e = 0$

Les deux fonctions d'état  $e^m$  et  $s^m$  sont liées par une relation.

Pour modéliser un fluide simple, il suffit de préciser une seule fonction d'état.

Nouvelle expression de la dissipation : (pour les fluides simples)

$$f_2 \text{tr} \mathbf{D} + f_3 : \text{dev} \mathbf{D} + f_4 \cdot \text{grad}_E T \geq 0, \quad \forall \text{tr} \mathbf{D} \forall \text{dev} \mathbf{D} \forall \text{grad}_E T$$



Définition

Relation de Helmholtz

Comportement mécanique

Comportement thermique

Fluides newtoniens

Exemples de fluides

# Comportement mécanique

Équation 2 : 
$$-\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e - \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3 \rho^2}) = f_2(\dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$$

$$\frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} = \rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) + f_2(\dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$$

Définition

Relation de Helmholtz

Comportement mécanique

Comportement thermique

Fluides newtoniens

Exemples de fluides

## Pression thermodynamique

$$p = -\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) \quad p \text{ est une fonction d'état}$$

## Pression mécanique

$$p_m = -\frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} = p - f_2 \quad (p_m \text{ n'est pas une fonction d'état})$$

(ces deux pressions sont confondues si  $f_2 = 0$ , fluides de Stokes)

Équation 3 : 
$$\text{dev} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_3(\dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{sph} \boldsymbol{\sigma} + \text{dev} \boldsymbol{\sigma} = -p_m \mathbf{G} + \mathbf{f}_3$$

## Loi de comportement mécanique d'un fluide simple

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + f_2) \mathbf{G} + \mathbf{f}_3$$

Il reste à choisir  $f_2$  et  $\mathbf{f}_3$  tels que  $\Phi \geq 0$  dans toute évolution.

# Comportement thermique

Équation 4 : 
$$-\frac{\mathbf{q}}{T} = \mathbf{f}_4(\dot{T}, \text{tr}\mathbf{D}, \text{dev}\mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$$

**Loi de comportement thermique (ou de conduction thermique)**

$$\mathbf{q} = -T \mathbf{f}_4(\dot{T}, \text{tr}\mathbf{D}, \text{dev}\mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots)$$

Il reste à **choisir**  $\mathbf{f}_4$  tel que  $\Phi \geq 0$  dans toute évolution.

On retrouve la nécessité d'existence d'une loi de comportement thermique imposée par le second principe.



Définition

Relation de Helmholtz

Comportement mécanique

Comportement thermique

Fluides newtoniens

Exemples de fluides

# Fluides newtoniens

$$\text{Dissipation : } \Phi = \underbrace{f_2 \operatorname{tr} \mathbf{D} + f_3 : \operatorname{dev} \mathbf{D}}_{\Phi_{int}} + \underbrace{f_4 \cdot \operatorname{grad}_E T}_{\Phi_{th}} \geq 0, \quad \forall \mathbf{D} \forall \operatorname{grad}_E T$$

On fait les choix suivants :

$$f_2 = k(T, \rho) \operatorname{tr} \mathbf{D} \quad \text{avec } k(T, \rho) \geq 0 \quad \text{viscosité de volume}$$

$$f_3 = 2\mu(T, \rho) \operatorname{dev} \mathbf{D} \quad \text{avec } \mu(T, \rho) \geq 0 \quad \text{viscosité isovolume (ou « dynamique »)}$$

$$f_4 = \frac{\alpha(T, \rho)}{T} \operatorname{grad}_E T \quad \text{avec } \alpha(T, \rho) \geq 0 \quad \text{conductivité thermique}$$

Avec ces choix, la dissipation est bien non négative :

$$\Phi = k(\operatorname{tr} \mathbf{D})^2 + 2\mu \|\operatorname{dev} \mathbf{D}\|^2 + \alpha T^{-1} \|\operatorname{grad}_E T\|^2 \geq 0, \quad \forall \mathbf{D} \forall \operatorname{grad}_E T$$

## Comportement mécanique des fluides newtoniens

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + f_2) \mathbf{G} + f_3 = (-p + k \operatorname{tr} \mathbf{D}) \mathbf{G} + 2\mu \operatorname{dev} \mathbf{D}$$

$$\text{où : } p = -\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) \quad (= \rho^2 \partial_\rho f_\psi) \quad (p \text{ est une fonction d'état})$$

## Comportement thermique

$$-\frac{\mathbf{q}}{T} = f_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q} = -\alpha \operatorname{grad}_E T \quad (\text{loi de Fourier})$$



Définition

Relation de Helmholtz

Comportement mécanique

Comportement thermique

Fluides newtoniens

Exemples de fluides

# Fluides simples : synthèse

**Fluide simple** : deux variables d'état  $T$  et  $\rho$ .

**Second principe** : la dissipation non négative implique :

- 1 la relation de Helmholtz : relation entre  $f_e$  et  $f_s$  ;
- 2 l'existence d'une loi de comportement mécanique ;  
définition de la fonction d'état *pression thermodynamique*  
$$p = -\rho^2(T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) ;$$
- 3 l'existence d'une loi de comportement thermique.

**Fluide Newtonien** : **choix** de fonction dissipatives simples thermodynamiquement admissibles ( $\Phi \geq 0$  dans toute évolution).

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + k \operatorname{tr} \mathbf{D}) \mathbf{G} + 2\mu \operatorname{dev} \mathbf{D} \quad \text{et} \quad \mathbf{q} = -\alpha \operatorname{tr} \mathbf{D}$$

Pour terminer le modèle de fluide simple, il reste à définir **une** fonction d'état parmi  $f_e$ ,  $f_s$  ou  $p$ .

(les autres s'en déduisent par leur définition et la relation de Helmholtz)



Définition

Relation de Helmholtz

Comportement mécanique

Comportement thermique

Fluides newtoniens

Exemples de fluides

# Exemple 1 : gaz parfaits

## Définition

La pression thermodynamique est :  $p = r\rho T$  (loi de Mariotte)

## Système à résoudre :

$$-\rho^2(T\partial_{\rho}f_s - \partial_{\rho}f_e) = r\rho T \quad (\text{définition des gaz parfaits})$$

$$T\partial_T f_s - \partial_T f_e = 0 \quad (\text{relation de Helmholtz})$$

## Solution : (voir pdf)

$$f_e = \int_{T_0}^T C_v(T) dT + C_1 \quad f_s = -r \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \int_{T_0}^T \frac{C_v(T)}{T} dT + C_2$$

(la constante  $r$  et la fonction indéterminée  $C_v(T)$  sont à déterminer expérimentalement)

## Remarques :

- Comportement mécanique :  $\boldsymbol{\sigma} = (-\rho r T + k \operatorname{tr} \mathbf{D}) \mathbf{G} + 2\mu \operatorname{dev} \mathbf{D}$
- On retrouve la relation de Mayer :  $C_p(T) - C_v(T) = r$  (voir pdf)
- On peut remplacer la loi de Mariotte par celle de Van der Waals.



## Exemple 2 : liquides idéaux

## Définition

La fonction d'état pression thermodynamique ne dépend pas des variables d'état :  $p(T, \rho) = p$

(un liquide idéal est incompressible et indilatable)

## Système à résoudre :

$$-\rho^2(T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) = p \quad (\text{définition d'un liquide idéal})$$

$$T \partial_T f_s - \partial_T f_e = 0 \quad (\text{relation de Helmholtz})$$

Solution : (voir pdf)

$$f_s = \int_{T_0}^T \frac{C_v(T)}{T} dT + C_1 \quad f_e = -\frac{p}{\rho_0} + \int_{T_0}^T C_v(T) dT + C_2$$

(la fonction indéterminée  $C_v(T)$  est à déterminer expérimentalement)

## Comportement mécanique :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{G} + 2\mu \operatorname{dev} \mathbf{D} \quad (\operatorname{tr} \mathbf{D} = 0)$$

# Exemple 3 : fluide simple compressible dilatable

Existe-t-il un fluide simple (variables d'état :  $\{T, \rho\}$ ) tel que

$$-\frac{\dot{p}}{\rho} (= \tau_v) = -\chi_T(T, \rho)\dot{p} + \alpha_p(T, \rho)\dot{T}, \quad \forall \dot{T} \forall \dot{p}$$

(les thermodynamiciens écrivent cette condition avec des « différentielles » :  $\frac{dv}{v} = -\chi_T dp + \alpha_p dT$ )

**Danger :** cette condition ne définit pas la fonction d'état  $p$ ,  
mais sa dérivée particulière  $\dot{p}$ . (possibilité d'inexistence de solution, voir pdf)

**Système à résoudre :** (pour alléger, on introduit  $\psi = e - Ts$ , détails dans le pdf)

$$\forall \dot{T} \forall \dot{p}, \quad \dot{p} = \dots \quad \Rightarrow \quad 2\partial_{\rho} f_{\psi} + \rho \partial_{\rho\rho} f_{\psi} = \frac{1}{\rho^2 \chi_T} \quad \text{et} \quad \partial_{T\rho} f_{\psi} = \frac{\alpha_p}{\rho^2 \chi_T}$$

(des solutions n'existent que si  $\chi_T(T, \rho)$  et  $\alpha_p(T, \rho)$  sont liés par une certaine relation différentielle)

**Idéalisations simplificatrices :**  $\chi_T(T, \rho) = \chi_0$  et  $\alpha_p(T, \rho) = \alpha_0$

**Solution du cas idéalisé :** (il se trouve qu'il y a une solution !)

$$f_{\psi} = -\frac{1}{\rho \chi_0} \left( 1 + \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \alpha_0 (T - T_0) \right) - \frac{p_0}{\rho} - \int_{T_0}^T \left( \int_{T_0}^T \frac{C_v(T)}{T} dT \right) dT + C_1 T + C_2$$

$$p = \frac{1}{\chi_0} \left( \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \alpha_0 (T - T_0) \right) + p_0 \quad f_e = \dots \quad f_s = \dots \quad (\text{voir pdf})$$

**Remarque :**  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho = \rho_0 e^{-\alpha_0(T-T_0) - \chi_0 p_0} > 0$  liquide compressible dilatable



Définition

Relation de Helmholtz

Comportement mécanique

Comportement thermique

Fluides newtoniens

Exemples de fluides



## Septième partie

# Synthèse

# Problème général de la MMC

## 1 Équations différentielles à résoudre :

$$\dot{\rho} = -\rho \operatorname{tr} \mathbf{D} \quad (\text{principe de la conservation de la masse})$$

$$\operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} = \rho (\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{f}_0^m) \quad (\text{principe de la mécanique de Newton})$$

$$\rho \dot{e}^m + \mathcal{P}_{int}^{vmec} = r^v - \operatorname{div}_E \mathbf{q} \quad (\text{principe de la conservation de l'énergie})$$

## 2 Modèle de comportement du milieu continu :

- Liste des variables d'état :  $\{T, \boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\}$  ou  $\{T, I_1, \dots, I_m\}$
- Expression des fonctions d'état :  $f_e, f_s, f_\psi, p, \dots$
- Comportement mécanique (thermodynamiquement admissible)
 
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_\boldsymbol{\sigma}(\text{état actuel, vitesse d'évolution actuelle})$$
- Comportement thermique (thermodynamiquement admissible)
 
$$\mathbf{q} = \mathbf{f}_\mathbf{q}(\text{état actuel, vitesse d'évolution actuelle})$$

## 3 Sollicitations extérieures :

- Sollicitations à distance :  $\mathbf{f}_0^m$  et  $r^v$
- Sollicitations aux frontières :  
conditions aux limites mécaniques et thermiques

## 4 État initial (seulement pour les problèmes non stationnaires)

La résolution analytique est généralement inaccessible :  
(sauf dans les problèmes académiques)

- système d'EDP complexe ; (couplées, non linéaires)
- non unicité des solutions ; (instabilités, bifurcations)
- complexité de la forme des frontières ;
- complexité des conditions aux limites.

Un résultat numérique doit toujours être considéré avec circonspection :

- les résultats numériques sont approximatifs ;  
(erreurs de troncature, erreur de méthode, convergence théorique)
- en cas de non unicité des solutions, on ne sait pas celle qui a été choisie par l'algorithme ;
- l'influence de paramètres s'analyse par interpolation entre des solutions. (interpolabilité supposée)

Les résolutions numériques sont néanmoins utiles car on ne dispose de rien d'autre !

# Applications de la MMC

## Mécanique des fluides :

- Variables d'état :  $\{T, \rho\}$
- Champs inconnus : description d'Euler du mouvement, des variables d'état, des fonctions d'état, ...
- Difficultés : couplage des EDP, instabilité des solutions (turbulence)
- Simplifications courantes : stationnarité, incompressibilité, isothermie, comportement newtonien, viscosités négligées.

## Mécanique des solides déformables :

- Variables d'état :  $\{T, \text{déformation}, \text{anisotropies}, \text{variables mnésiques}\}$ .
- Champs inconnus : description de Lagrange du mouvement (ou des déplacements), des variables d'état, des fonctions d'état, ...
- Difficultés : couplage des EDP, instabilité des solutions (flambage), lois de comportement complexes.
- Simplifications courantes : stationnarité, élasticité ( $\Phi_{int} = 0$ ), isothermie ( $\Phi_{th} = 0$ ), petites déformations (cf. cinématique).

## Acoustique :

- Propagation de perturbations dans les fluides et/ou les solides.
- Simplifications courantes : EDP linéarisées autour d'un état, comportements mécanique et thermique simplifiés.





## Et maintenant une annonce...

Le prochain épisode s'intitule :

### Comportement élastique

**Au programme :**

- Concepts fondamentaux ;
- Élasticité isotrope ;
- Pseudo-élasticité de Hooke ;
- Élasticité anisotrope ;
- Le problème élastique ;
- Illustrations numériques ;

**Merci de votre attention.**