La méthode des éléments finis

Jean GARRIGUES
Jean.Garrigues@esm2.imt-mrs.fr

Janvier 2002

Avertissement

Ce texte a pour but de familiariser le lecteur avec la méthode des éléments finis. On n'y trouvera donc que le strict minimum de fondements théoriques. En particulier, on ne trouvera aucune démonstration de théorèmes d'analyse fonctionnelle ni de théorème de convergence. Le lecteur insatisfait est invité à se reporter aux cours d'analyse numérique. Par contre, on trouvera ici des informations pratiques pour maitriser l'outil et pour comprendre les options proposées par les logiciels et les problèmes numériques qui peuvent se présenter.

Dans un souci de généralité, on ne fera allusion à aucun logiciel particulier. La terminologie employée s'efforcera donc d'être générale. Il se peut qu'une certaine «traduction» soit nécessaire pour adapter les concepts aux idiomes particuliers à chaque logiciel.

Convention typographique

Les quantités vectorielles et tensorielles sont notées en caractères gras. Leurs composantes sont en caractères ordinaires.

Chapitre 1

Introduction

La plupart des problèmes de physique peuvent se formuler ainsi :

Trouver un champ (scalaire, vectoriel, ou tensoriel) $\boldsymbol{u}(M,t)$ satisfaisant à un ensemble d'équations aux dérivées partielles et d'équations ordinaires en tout point M d'un domaine Ω et à tout instant t, et respectant des conditions aux limites (éventuellement fonction du temps) sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine.

Les conditions aux limites sont des relations ou des valeurs imposées à $\boldsymbol{u}$ et/ou à ses dérivées sur la frontière.

Si le temps t n'apparaît pas comme variable, on dit que le problème est *stationnaire*, sinon c'est un *problème d'évolution*.

Exemple 1: Le problème thermique stationnaire

Le champ inconnu est un champ scalaire : la température $T(M)$. L'équation différentielle est :

$$\Delta T(M) = f(M) \;\; \forall M \in \Omega$$

où $f(M)$ est une fonction donnée.

Les conditions aux limites sont par exemple:

– Un champ de température stationnaire imposé sur la partie de frontière $\partial\Omega_1$:

$$T(N) = T_f(N) \;\; \forall N \in \partial\Omega_1$$

– un champ de flux thermique stationnaire imposé sur la partie de frontière $\partial\Omega_2$:

$$\mathbf{grad}\, T(N) \overline{\otimes} \boldsymbol{n}(N) = \Phi_f(N) \;\; \forall N \in \partial\Omega_2$$

où $\boldsymbol{n}(N)$ est la normale extérieure en Nà la frontière.

En principe, pour que la solution soit entièrement déterminée, il faut que $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$ et $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$, c'est à dire qu'il faut imposer des conditions aux limites sur toute la frontière. Cependant, la plupart des logiciels ont des conditions implicites appliquée aux parties de frontières sur lesquelles on ne dit rien [1], et qu'il faut connaître en lisant les manuels.

1. Par exemple, dans un logiciel d'éléments finis spécialisé dans la mécanique, ne pas mettre de condition aux limites sur une partie de frontière, est généralement implicitement interprété comme un partie sur laquelle la contrainte exercée par le milieu extérieur est nulle, c'est à dire $\boldsymbol{\sigma}(N) \overline{\otimes} \boldsymbol{n}(N) = \mathbf{0}$. En thermique, la condition similaire correspndrait à une paroi à flux thermique nul, c'est à dire adiabatique, ce qui n'est peut-être pas ce que l'utilisateur non averti sous-entend quand il ne dit rien sur cette frontière...

Exemple 2: Le problème élastique linéaire d'évolution

Pour simplifier on ne l'exprime ici que dans le cas des petites perturbations (petits déplacements et petites déformations).

Le champ inconnu est un champ vectoriel : le champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}(M,t)$. Les équations sont :

$$\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}(M,t)}{\partial t^2} \quad \text{(Principe fondamental de la mécanique)}$$

$$\text{avec} \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\,\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{\epsilon}\,\boldsymbol{G} \quad \text{(loi de comportement petites déformations et petits déplacements)}$$

$$\text{et} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{grad}\boldsymbol{\xi}(M,t) + \mathbf{grad}^t\boldsymbol{\xi}(M,t)\right) \quad \text{(petites déformations)}$$

Les conditions aux limites sont :

- Un champ de déplacements (éventuellement nul), fonction du temps, imposé sur la partie de frontière $\partial\Omega_1$:

$$\boldsymbol{\xi}(N,t) = \boldsymbol{\xi}_f(N,t) \quad \forall N \in \partial\Omega_1$$

- Un champ de forces surfaciques (éventuellement nul), fonction du temps, imposés sur la partie de frontière $\partial\Omega_2$:

$$\boldsymbol{\sigma}(N,t)\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}(N) = \boldsymbol{q}_f(N,t) \quad \forall N \in \partial\Omega_2$$

  où $\boldsymbol{n}(N)$ est la normale extérieure en N à la frontière.

Compte tenu de la loi de comportement et de la définition de $\boldsymbol{\epsilon}$, la dernière condition aux limites se ramène à des conditions sur les dérivées normales de $\boldsymbol{\xi}(M,t)$ sur la frontière.
■

Si le modèle physique choisi pour modéliser le problème réel nous fournit les équations et les conditions aux limites, les mathématiques, par contre, sont souvent impuissantes pour en donner une solution analytique. Les mathématiques prouvent parfois l'existence et l'unicité de la solution, et il est prudent de s'en assurer avant de se lancer dans la recherche d'une solution numérique [2].

L'analyse numérique fournit des solutions *numériques*. Elles sont plus pauvres qu'une solution analytique. Par exemple, dans le problème élastique, il faut donner une valeur numérique aux caractéristiques du matériau λ et μ, ainsi qu'une définition numérique des conditions aux limites $\boldsymbol{\xi}_f(N,t)$ et $\boldsymbol{q}_f(N,t)$. La solution calculée n'est donc valable que pour ce matériau et pour ces conditions aux limites, alors qu'une solution analytique conserve tous les paramètres et permet d'étudier leur influence sur la solution. Pour avoir une idée de l'influence de ces paramètres, l'ingénieur en est réduit à recommencer le calcul avec d'autres valeurs et *estimer* leur influence par comparaison entre les différents résultats.

Pour estimer une solution avec des valeurs de paramètres non calculés, on peut tenter *d'interpoler* (avec une méthode d'interpolation arbitraire !) entre les solutions calculées, mais il est généralement imprudent d'extrapoler. *Une série de calculs numériques ne fournit pas de connaissance au sens strict du terme.* En effet, entre les valeurs calculées, les solutions peuvent avoir des variations brusques insoupçonnées. Quand on interpole entre deux solutions, on *postule* une certaine régularité.

L'analyse numérique fournit plusieurs méthodes de résolution des systèmes d'équations differentielle avec conditions aux limites, parmi lesquelles on peut citer la méthode de différences finies, la méthode des volumes finis et enfin la méthode des éléments finis, qui fait l'objet de ce cours.

2. Si la solution n'est pas unique, et que l'algorithme converge vers une solution, il n'est pas possible de se rendre compte de la non unicité. Si on utilise un autre algorithme, il peut très bien converger vers une autre.

Chapitre 2

Grandes lignes de la méthode des éléments finis

2.1 Exposé de la démarche

La méthode consiste à rechercher une solution *approchée* de la solution exacte sous la forme d'un champ $\widetilde{F}(M,t)$ défini par morceaux sur des sous domaines de Ω. Les n sous domaines Ω_i doivent être tels que

$$\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i = \Omega \text{ et } \widetilde{\Omega}_i \cap \widetilde{\Omega}_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$$

où $\widetilde{\Omega}_i$ désigne l'intérieur de Ω_i. Autrement dit, les Ω_i sont une partition de Ω.

Les champs $\widetilde{f}_i(M,t)$, définis sur chaque sous domaines sont des champs choisis parmi une famille *arbitraire* de champs (généralement polynômiaux).
La famille de champs locaux est appelée *espace des fonctions d'interpolation de l'élément.*
La famille de champs globaux $\widetilde{F}(M,t)$, obtenus par juxtaposition des champs locaux est appelée *espace des fonctions d'interpolation du domaine* Ω.

Le champ dans chaque sous domaine Ω_i est déterminé par un nombre fini de valeurs du champ (ou de valeurs de ses dérivées) en des points choisis arbitrairement dans le sous domaine, et appelés *nœuds* [1]. Le champ local est une *interpolation* entre les valeurs aux nœuds. Le sous domaine muni de son interpolation est appelé *élément.*

Chercher une solution par éléments finis consiste donc à déterminer quel champ local on attribue à chaque sous domaine [2] pour que le champ global $\widetilde{F}(M,t)$ obtenu par juxtaposition de ces champs locaux soit proche de la solution du problème.

Parmi les contraintes qu'on impose à la solution approchée cherchée, il y a souvent au moins une continuité simple (C_0) à la frontière entre les sous domaines.

La figure 2.1 montre une solution approchée discontinue d'un champ scalaire sur un domaine Ω de dimension 1. La famille de champs locaux est la famille des champs constants par morceaux.

La figure 2.2 montre une solution approchée continue C_0 d'un champ scalaire sur un domaine Ω de dimension 1. La famille de champs locaux est la famille des champs polynômiaux de degré 1.

1. On verra plus loin qu'il vaut mieux choisir au moins une partie des nœuds sur la frontière
2. C'est à dire, quelles valeurs il faut donner aux nœuds.

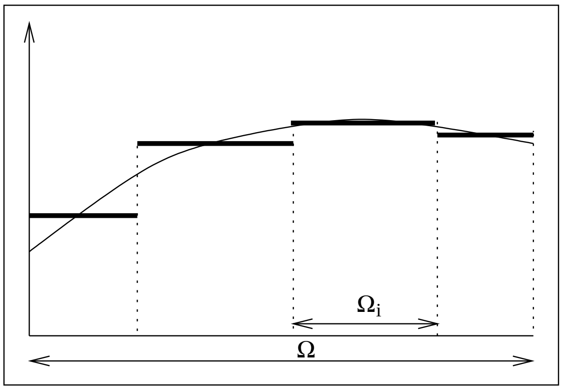

FIG. 2.1 – *Solution approchée discontinue*

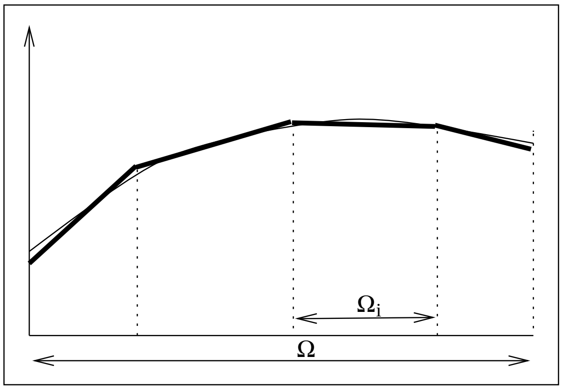

FIG. 2.2 – *Solution approchée continue C_0*

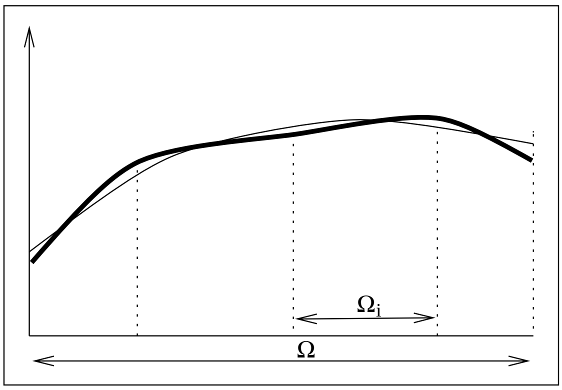

FIG. 2.3 – *Solution approchée continue C_1*

La figure 2.3 montre une solution approchée continue C_1 d'un champ scalaire sur un domaine Ω de dimension 1. La famille de champs locaux est la famille des champs polynômiaux de degré 3.

La qualité de la solution approchée dépend de la division en sous domaines (nombre et dimensions des sous domaines), du choix de la famille de champs locaux dans chaque sous domaine, et des conditions de continuité qu'on impose aux frontières des sous domaines ($C_0, C_1, ...$). Une fois ces choix faits, il reste à rechercher, une combinaison de champs locaux qui satisfait approximativement les équations.

Pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis, on procède donc par étapes successives :

1. On se pose un problème physique sous la forme d'une équation différentielle ou aux dérivés partielles à satisfaire en tout point d'un domaine Ω, avec des conditions aux limites sur le bord $\partial\Omega$.
2. On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : C'est la *formulation variationnelle du problème*.
3. On divise Ω en sous domaines : C'est le *maillage*. Les sous domaines sont appelés *mailles*.
4. On choisit la famille de champ locaux, c'est à dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds (et éventuellement des dérivées). La maille complétée par ces informations est alors appelée *élément*.
5. On ramène le problème à un problème discret : C'est la *discrétisation*. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. Il suffit donc de trouver les valeurs à attribuer aux nœuds pour décrire une solution approchée. Le problème fondamental de la méthode des éléments finis peut se résumer en deux questions :
   (a) Comment choisir le problème discret dont la solution est «proche» de la solution exacte?
   (b) Quelle signification donner au mot «proche»?
6. On résout le problème discret: C'est la *résolution*
7. On peut alors construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs[3] : C'est le *post-traitement*.
8. On visualise et on exploite la solution pour juger de sa qualité numérique et juger si elle satisfait les critères du cahier des charges : C'est *l'exploitation des résultats*.

Les étapes 1,2,3,4 et 5 sont souvent rassemblées sous le nom de *prétraitement*.

Le travail de ces différentes étapes est assisté par les logiciels. Il reste que pour maîtriser leur utilisation, il est indispensable de comprendre les fondements de la méthode, notamment les phases 3 et 4, ne serait-ce que pour comprendre et choisir intelligemment parmi les options qu'ils proposent.

2.2 Un exemple détaillé

On se propose de rechercher une solution approchée du problème suivant :

Trouver $f(x)$ dans le domaine $\Omega = [0, 1]$ satisfaisant l'équation différentielle

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2\,\frac{df(x)}{dx} - 3\,x = 0$$

3. par exemple, en élasticité,quand on a obtenu une solution approchée du champ des déplacements, on en déduit le champ des tenseurs de déformation, puis le champ des tenseurs de contraintes

avec les conditions aux frontières de Ω :

$$f(0) = 0 \text{ et } \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=1} = 0$$

Dans ce problème, Ω est un domaine de dimension 1 et le temps n'apparaît pas. Pour décrire les points du domaine, on n'a besoin que d'une seule variable x. L'équation à résoudre est donc une équation différentielle ordinaire. La frontière $\partial\Omega$ se réduit à deux points[4].

La solution exacte de ce problème est

$$f(x) = -\frac{3}{4}\,x + \frac{3}{4}\,x^2 - \frac{3}{8}\,e^2 + \frac{3}{8}\,e^{2-2\,x}$$

Son graphe est donné figure 2.6 page 15.

2.2.1 Choix du maillage

On divise *arbitrairement* Ω en trois mailles de même taille (voir figure 2.4):

$$\Omega_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad ; \quad \Omega_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \quad ; \quad \Omega_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

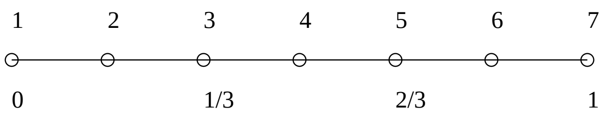

FIG. 2.4 – *Maillage du problème*

2.2.2 Choix des nœuds et des champs locaux

On décide de prendre des éléments à 3 nœuds , et pour la famille de champs locaux des polynômes de degré 2. Les nœuds sont choisis aux extrémités et au milieu de chaque maille.

On peut alors déterminer chaque champ local en fonction des valeurs aux 3 nœuds.

Remarquer que le fait d'avoir utilisé des nœuds aux extrémités de chaque élément présente deux avantages :

1. Le nombre de nœuds[5] est réduit, car il y a des nœuds communs à deux éléments.
2. On assure ainsi une continuité C_0 de la solution approchée : les champs locaux de deux éléments voisins auront la même valeur à leur nœud commun.

Remarquer encore qu'il n'est pas nécessaire de prendre les éléments identiques : on aurait pu prendre certains à deux nœuds et d'autres à trois nœuds.

4. Pour des domaines de dimension supérieure à 1, on a des équations aux dérivées partielles. Si le domaine est de dimension 2, $\partial\Omega$ est un (ou plusieurs) contour(s), s'il est de dimension 3, $\partial\Omega$ est une (ou plusieurs) surface(s). Les conditions aux limites sont alors des *champs* imposés sur $\partial\Omega$.

5. et donc le nombre d'inconnues

Chaque champ local peut donc s'exprimer en fonction des valeurs aux nœuds. En effet, il n'existe qu'un seul polynôme du second degré qui satisfasse les conditions suivantes [6] :

$$
\begin{aligned}
a_1\,x_1^2 + b_1\,x_1 + c_1 &= f_1\\
a_1\,x_2^2 + b_1\,x_2 + c_1 &= f_2\\
a_1\,x_3^2 + b_1\,x_3 + c_1 &= f_3
\end{aligned}
$$

où x_1, x_2 et x_3 sont les coordonnées des 3 nœuds de l'élément, et f_1, f_2 et f_3 sont des valeurs aux 3 nœuds de l'élément.

On obtient :

$$a_1 = \frac{x_2\,f_1 - x_2\,f_3 + x_1\,f_3 - f_1\,x_3 - f_2\,x_1 + f_2\,x_3}{(x_2 - x_3)\,(x_1 - x_3)\,(x_1 - x_2)} \tag{2.1}$$

$$b_1 = -\frac{{x_1}^2 f_3 - {x_1}^2 f_2 + {x_3}^2 f_2 - f_1\,{x_3}^2 - f_3\,{x_2}^2 + f_1\,{x_2}^2}{(x_2 - x_3)\,(x_1 - x_3)\,(x_1 - x_2)} \tag{2.2}$$

$$c_1 = \frac{{x_1}^2 x_2\,f_3 - {x_1}^2 f_2\,x_3 - f_3\,{x_2}^2 x_1 + {x_3}^2 f_2\,x_1 + f_1\,{x_2}^2 x_3 - {x_3}^2 x_2\,f_1}{(x_2 - x_3)\,(x_1 - x_3)\,(x_1 - x_2)} \tag{2.3}$$

Le polynôme avec les coefficients a_1, b_1 et c_1 ci-dessus est appelé *fonction d'interpolation* de l'élément 1.

Les polynômes d'interpolation des 2 autres sont de la même forme : Pour le second, on remplace les indices 1,2,3 par les indices 3,4,5 ; et pour le troisième, on remplace les indices 1,2,3 par les indices 5,6,7.

Dans cet exemple, on a 7 nœuds. Si on donne une valeur arbitraire à chaque nœud, les fonctions d'interpolation sont déterminées et définissent par morceaux une fonction $\tilde{f}$ continue C_0 sur le domaine Ω. L'espace des fonctions $\tilde{F}$, définies en 3 morceaux, est de dimension 7.

Les trois fonctions d'interpolation sur les 3 éléments sont :

$$\tilde{f}_1 = (18\,f_3 - 36\,f_2 + 18\,f_1)\,x^2 + (-3\,f_3 + 12\,f_2 - 9\,f_1)\,x + f_1 \tag{2.4}$$

$$\tilde{f}_2 = (18\,f_5 - 36\,f_4 + 18\,f_3)\,x^2 + (-15\,f_5 + 36\,f_4 - 21\,f_3)\,x + 3\,f_5 - 8\,f_4 + 6\,f_3 \tag{2.5}$$

$$\tilde{f}_3 = (18\,f_7 - 36\,f_6 + 18\,f_5)\,x^2 + (-27\,f_7 + 60\,f_6 - 33\,f_5)\,x + 10\,f_7 - 24\,f_6 + 15\,f_5 \tag{2.6}$$

2.2.3 Formulation variationnelle du problème

On montre en analyse fonctionnelle que

$$\int_\Omega \psi(x)\,h(x)\,dx = 0 \;\; \forall \psi(x) \quad \Longleftrightarrow \quad h(x) = 0\;\forall x \in \Omega$$

où $\psi(x)$ et $h(x)$ et Ω doivent satisfaire à certaines conditions de régularité qu'on n'explicitera pas ici.

Autrement dit, résoudre l'équation différentielle est équivalent à chercher $f(x)$ tel que :

$$\int_\Omega \psi(x)\,\left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2\,\frac{df(x)}{dx} - 3\,x\right)\,dx = 0 \;\; \forall \psi(x) \tag{2.7}$$

$$\text{avec} \;\; f(0) = 0 \;\; \text{et} \;\; \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=1} = 0 \tag{2.8}$$

6. Cette condition est essentielle : Il faut que le champ local soit complètement et uniquement déterminé par les valeurs imposées aux nœuds.

Cette formulation est une *formulation variationnelle* (on dit aussi *formulation intégrale* ou encore *formulation faible*) du problème.

On obtient une autre formulation variationnelle en utilisant l'intégration par parties

$$\int_0^1 \psi(x)\,\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\,dx = -\int_0^1 \frac{d\psi(x)}{dx}\,\frac{df(x)}{dx}\,dx + \left[\psi(x)\,\frac{df(x)}{dx}\right]_0^1$$
$$\int_0^1 \psi(x)\,\frac{df(x)}{dx}\,dx = -\int_0^1 \frac{d\psi(x)}{dx}\,f(x)\,dx + [\psi(x)\,f(x)]_0^1$$

Compte tenu des conditions aux limites, $f(0) = 0$ et $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=1} = 0$, une autre formulation variationnelle du problème est donc :
Trouver $f(x)$ tel que

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \frac{d\psi(x)}{dx}\,\frac{df(x)}{dx}\,dx + 0 - \psi(0)\,\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=0} \\ -2\int_0^1 \frac{d\psi(x)}{dx}\,f(x)\,dx + 2\,\psi(1)\,f(1) - 0 \\ -3\int_0^1 \psi(x)\,x\,dx = 0 \quad \forall\psi(x) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Il est important de noter que dans les termes de bord de cette dernière formulation, les conditions aux limites sont prises en compte. En comparant les deux formulations variationnelles (2.7) et (2.9), on constate que, dans la seconde forme, la fonction inconnue $f(x)$ intervient avec des dérivées d'ordre inférieur, et que par contre les dérivées des fonctions $\psi(x)$ apparaissent. L'équivalence entre ces deux formulations variationnelles et le problème initial est soumise à des conditions sur $f(x)$, $\psi(x)$ et Ω précisées par l'analyse fonctionnelle et qu'on supposera satisfaites.

Remarque :
La démarche suivie ici pour construire une formulation variationnelle du problème est purement mathématique. Il arrive souvent que la formulation variationnelle ait une interprétation physique. On peut donc aussi les établir par des raisonnements physiques [7].

2.2.4 Discrétisation du problème

Le principe de l'approximation par éléments finis est le suivant :

On choisit une formulation variationnelle (par exemple (2.9)) et on cherche à satisfaire l'équation (2.9) avec les $\tilde{f}$ déterminés par les valeurs aux nœuds définis précédemment. Il va de soit que ce problème, n'a généralement pas de solution si on garde la condition «$\forall\psi(x)$» (sinon $\tilde{f}$ serait une solution exacte !). On ne vérifiera donc cette équation *que pour certains* $\psi_i(x)$ *seulement.*
À chaque $\psi_i(x)$ correspondra une équation scalaire fonction des valeurs aux nœuds. Il suffit de les choisir indépendants et en nombre égal au nombre d'inconnues. Dans notre exemple, il en faut 7 pour déterminer les valeurs aux noeuds $f_1, ..., f_7$ [8]. Les fonctions $\psi(x)$ sont appelées *fonctions test* ou encore *fonctions de pondération.*
On est ainsi ramené à un système algébrique de 7 équations à 7 inconnues.

7. C'est notamment le cas en mécanique : Le théorème des puissances virtuelles fournit directement une formulation variationnelle, les champs de vitesses virtuelles n'étant rien d'autre que les fonctions $\psi(x)$.

8. On peut aussi diminuer le nombre d'inconnues en imposant aux $\tilde{f}$ de respecter exactement les conditions aux limites. Dans l'exemple, il serait ramené à 5. Si on ne le fait pas, les conditions aux limites ne seront qu'approximativement satisfaites.

Il y a une infinité de manières de choisir les 7 $\psi_i(x)$. Elles engendrent différentes variantes de la méthode des éléments finis. Chacune aboutit à une solution approchée différente. La seule condition impérative est que le choix des ψ_i doit conduire à un système algébrique à solution unique. Des théorèmes d'analyse numérique suggèrent certains choix, pour lesquels la solution approchée $\tilde{f}$ est garantie unique et convergente vers la solution exacte [9] quand le maillage se raffine.

Dans notre exemple, si on choisit la formulation (2.9), les fonctions $\psi_i(x)$ doivent avoir une dérivée non nulle partout, pour que la formulation ne soit pas triviale [10]. Par contre, dans cette formulation, la dérivée seconde de la fonction $f(x)$, qui sera remplacée par l'approximation $\tilde{f}(x)$, n'apparaît plus. On pouvait donc choisir une famille d'approximation $\tilde{f}(x)$ plus simple[11].

On choisit par exemple les 7 fonctions test ψ_0, ψ_1,...,ψ_6 définies par la figure 2.5.

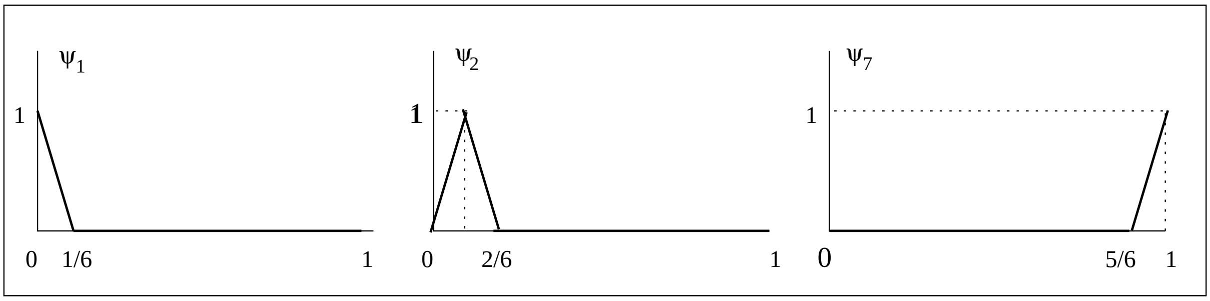

FIG. 2.5 – *Les sept fonctions $\psi_i(x)$*

Leurs dérivées sont constantes (+6 ou -6) ou nulles et on a $\psi_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Pour chaque fonction test ψ_i on écrit une équation scalaire:

$$- \int_0^1 \frac{d\psi_i(x)}{dx} \frac{d\tilde{f}(x)}{dx}\, dx - \psi_i(0) \left[\frac{d\tilde{f}(x)}{dx} \right]_{x=0} - 2 \int_0^1 \frac{d\psi_i(x)}{dx} \tilde{f}(x)\, dx + 2\, \psi_i(1)\, \tilde{f}(1) - 3 \int_0^1 \psi_i(x)\, x\, dx = 0 \quad \text{pour } i = 1..7$$

où les $\tilde{f}(x)$ sont des fonctions de x et des valeurs aux nœuds $f_1, f_2, ..., f_7$.
Les intégrales de ces 7 équations sont faciles à calculer : elles se réduisent à des intégrales sur le segment où les dérivées de ψ_i sont non nulles.

La construction de ce système d'équations s'appelle *l'assemblage*. Pour un choix différent de fonctions $\psi_i(x)$, les intégrales sur chaque élément sont moins simples à calculer [12].

9. On ne sait le démontrer que pour certains types de problèmes, en particulier les problèmes où l'équation différentielle est linéaire. Il existe aussi d'autres résultats, mais pour beaucoup de problèmes, la méthode des éléments finis reste une méthode heuristique.

10. Alors qu'avec la première formulation intégrale, on aurait pu prendre des fonctions constantes par morceaux ou même des distributions de Dirac (méthode dite de *collocation*).

11. par exemple: des fonctions d'interpolation linéaires par morceaux, avec des éléments à deux nœuds. La dimension de l'espace des $\widetilde{F}$ serait 4. On aurait donc moins de «liberté» pour ajuster la solution approchée, l'approximation trouvée serait plus grossière. On donne en fin de chapitre le graphe du résultat

12. On verra plus loin qu'on peut les calculer de manière exacte ou approchée.

Par exemple, la première équation (avec ψ_1) est :

$$-\int_0^{\frac{1}{6}} \frac{d\psi_1(x)}{dx}\,\frac{d\tilde{f}(x)}{dx}\,dx - \psi_1(0)\left[\frac{d\tilde{f}(x)}{dx}\right]_{x=0} - 2\int_0^{\frac{1}{6}} \frac{d\psi_1(x)}{dx}\,\tilde{f}(x)\,dx + 2\,\psi_1(1)\,\tilde{f}(1) - 3\int_0^{\frac{1}{6}} \psi_1(x)\,x\,dx = 0$$

soit encore :

$$-\int_0^{\frac{1}{6}} (-6)\,\frac{d\tilde{f}(x)}{dx}\,dx - \left[\frac{d\tilde{f}(x)}{dx}\right]_{x=0} - 2\int_0^{\frac{1}{6}} (-6)\,\tilde{f}(x)\,dx - 3\int_0^{\frac{1}{6}} (1-6\,x)\,x\,dx = 0$$

où $\tilde{f}(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ dans le segment $\left[0, \frac{1}{6}\right]$, avec a, b et c définis en (2.1). On procède de même pour les 6 autres équations[13].

On obtient ainsi un système de 7 équations à 7 inconnues (les valeurs aux nœuds $f_1, f_2, ..., f_7$) :

$$\begin{aligned}
\frac{23}{6}\,f_1 - \frac{14}{3}\,f_2 + \frac{17}{6}\,f_3 - \frac{1}{72} &= 0\\
7\,f_3 + 5\,f_1 - 12\,f_2 - \frac{1}{12} &= 0\\
\frac{22}{3}\,f_4 + \frac{14}{3}\,f_2 - 12\,f_3 - 1/6\,f_5 + \frac{1}{6}\,f_1 - \frac{1}{6} &= 0\\
7\,f_5 - 12\,f_4 + 5\,f_3 - \frac{1}{4} &= 0\\
-12\,f_5 + \frac{14}{3}\,f_4 + \frac{22}{3}\,f_6 + \frac{1}{6}\,f_3 - \frac{1}{6}\,f_7 - \frac{1}{3} &= 0\\
5\,f_5 + 7\,f_7 - 12\,f_6 - \frac{5}{12} &= 0\\
\frac{14}{3}\,f_6 - \frac{29}{6}\,f_7 + \frac{1}{6}\,f_5 - \frac{17}{72} &= 0
\end{aligned}$$

2.2.5 Résolution

La solution de ce système donne les valeurs aux nœuds de l'approximation $\tilde{f}(x)$ cherchée :

$$f_1 = \frac{4107}{54872}, f_2 = -\frac{7063}{8664}, f_3 = -\frac{236893}{164616}, f_4 = -\frac{25563}{13718}, f_5 = -\frac{350779}{164616} f_6 = -\frac{374605}{164616}, f_7 = -\frac{127275}{54872}$$

Les choix faits précédemment (les fonctions tests et les fonctions d'interpolation) conduisent à un système d'équations non symétrique. On verra plus loin comment obtenir des systèmes symétriques, pour lesquels on dispose d'algorithmes numériques plus efficaces.

Les f_i étant déterminées, on connaît alors les interpolations dans les trois sous domaines, et donc aussi la solution approchée en juxtaposant ces interpolations.

2.2.6 Examen des résultats

La figure 2.6 montre une comparaison entre la solution exacte et la solution approchée.

13. en prenant soin de prendre la bonne définition de $\tilde{f}(x)$ dans les intervalles d'intégration !

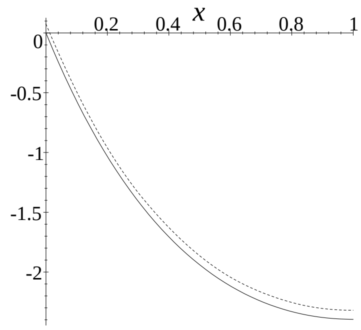

Fig. 2.6 – *Comparaison des solutions exacte et approchée*

On peut noter que puisqu'on n'a pas imposé aux fonctions $\tilde{f}(x)$ de respecter exactement les conditions aux limites, celles-ci ne le sont qu'approximativement:

$$\tilde{f}(0) \simeq 0.0748 \ ; \ \left[\frac{d\tilde{(x)}}{dx}\right]_{x=1} \simeq 0.0394$$

Bien que cela n'apparaisse pas clairement sur la figure 2.6, les dérivées sont bien discontinues :

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{d\tilde{f}(x)}{dx} \simeq -2.944 \ ; \ \lim_{\frac{1}{3} \leftarrow x} \frac{d\tilde{f}(x)}{dx} \simeq -3.017$$

À titre de comparaison on donne figure 2.7 le graphe de la solution approchée avec le même maillage mais avec des éléments à interpolation linéaire à deux nœuds. L'espace des $\tilde{F}(x)$ n'est que de dimension 4 et la solution est beaucoup plus grossière. On donne aussi figure 2.8 le graphe

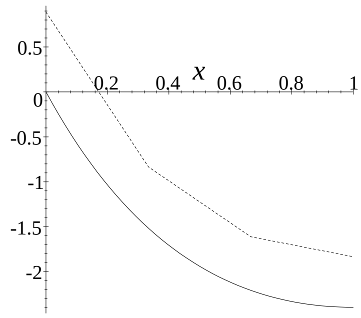

Fig. 2.7 – *Approximation par 3 éléments linéaires*

avec 3 éléments à interpolation linéaire à deux nœuds où on a astreint les interpolations des éléments 1 et 3 à respecter exactement les conditions aux limites. L'espace des $\tilde{F}(x)$ n'est plus que de dimension 2.

On donne enfin figure 2.9 le graphe avec 3 éléments à interpolation du second degré à 3 nœuds où on a astreint les interpolations des éléments 1 et 3 à respecter exactement les conditions aux limites. L'espace des $\tilde{F}(x)$ est de dimension 5.

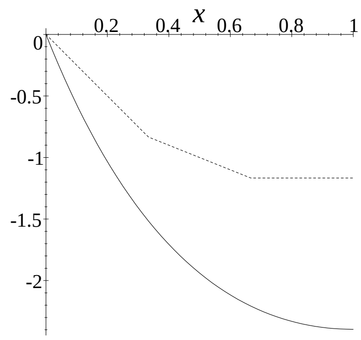

FIG. 2.8 – *Approximation par 3 éléments linéaires,avec C.L. imposées exactes*

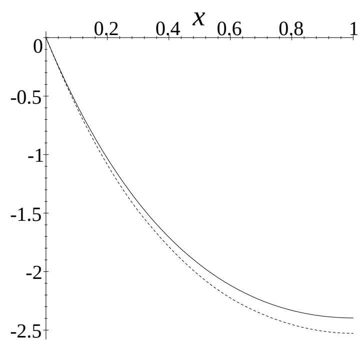

FIG. 2.9 – *Approximation par 3 éléments d'ordre 2,avec C.L. imposées exactes*

Chapitre 3

Le maillage

L'opération de maillage consiste à diviser le domaine Ω en sous domaines appelés *mailles*. Il faut donc :

- Définir le domaine Ω
- Le diviser en mailles Ω_i telles que l'ensemble des Ω_i soit une partition du domaine Ω.

Ces opérations sont *assistées* par les logiciels, mais sont rarement complètement automatiques.

3.1 Définition du domaine Ω

La définition du domaine Ω peut être faite dans le logiciel d'éléments finis ou peut être importée d'un autre logiciel mieux adapté pour ce travail (logiciel de CAO).

3.1.1 Définition du domaine Ω dans le logiciel d'éléments finis

Chaque logiciel a ses propres outils de définition et de visualisation d'entités géométriques. On retrouve néanmoins des concepts communs [1] :

notion de repère : (parfois appelés *référentiels*). Il existe toujours un repère appelé *repère global*, qui est le repère utilisé par défaut quand on n'en définit pas d'autre. On peut définir et utiliser d'autres repères si on les trouve plus commodes pour définir les objets géométriques qui suivent.

notion de système de coordonnées : pour désigner un point par trois nombres dans un repère, on peut choisir si ces trois nombres sont des coordonnées cartésiennes (la plupart du temps c'est l'option par défaut), cylindriques, sphériques ou autre.

notion de point : il peut être désigné par ses coordonnées dans un repère ou par une définition géométrique [2].

notion de ligne : On peut définir des droites, des segments de droites, des cercles, des arcs de cercle, des coniques, des arcs de coniques, des courbes de Bézier, des splines, des Bsplines, des NURBS [3]... La liste est plus ou moins riche suivant les logiciels.

1. Mais le vocabulaire et la syntaxe des commandes varient d'un logiciel à l'autre.
2. par exemple le milieu d'un segment de droite existant, ou par l'intersection de deux lignes existantes, etc.
3. Non Uniform Rational B-Spline

notion de surface «porteuse» : Il s'agit de surfaces sans bords, c'est à dire dont on n'a pas défini les limites. On peut définir des plans, des cylindres, des sphères, des tores, des cônes, des surfaces de Bézier, des surfaces splines, des surfaces Bsplines, des surfaces NURBS...

notion de surface délimitée : Il s'agit d'une surface porteuse associée à un ou plusieurs contours. L'un des contours (généralement le premier) est le contour extérieur, les autres sont les contours intérieurs (surfaces à «trous») ; Il va de soi que ces contours ne doivent pas s'intersecter ! Une surface peut aussi être délimitée par son intersection avec d'autres surfaces. Elle peut aussi être engendrée par le déplacement d'une ligne suivant un certain parcours (c'est à dire une autre ligne), ou suivant un certain mouvement (translation, rotation ou autre).

notion de volume : C'est une portion limitée de l'espace. Il peut être défini par les surfaces qui le délimitent, ou par le déplacement d'une surface suivant un parcours, ou par des instructions particulières pour des volumes simples (parallélépipèdes, sphères, cylindres, tores ...) .

Suivant les logiciels, la palette d'objets géométriques et la palette d'outils (intersections, prolongements, congés automatiques...) est plus ou moins riche et la définition de domaines Ω complexes est plus ou moins aisée[4].

3.1.2 Importation du domaine Ω d'un autre logiciel

La définition d'un domaine Ω de forme complexe est parfois mal commode dans les préprocesseurs de logiciels d'éléments finis. Il est quelquefois judicieux de le faire dans un autre logiciel plus adapté. On utilise alors un logiciel de CAO. Le problème est que chaque logiciel (d'éléments finis ou de CAO) a sa propre méthode pour décrire la géométrie d'un domaine dans un fichier. Un fichier issu d'un logiciel de CAO n'est généralement pas compris par un autre logiciel de CAO ou d'éléments finis !

Il existe cependant des formats standards normalisés de description de géométries. Si on a la chance que le logiciel de CAO et le logiciel d'éléments finis soient capables tous les deux de lire et écrire dans l'un de ces formats standards, on peut communiquer une géométrie de l'un à l'autre.

Malheureusement, les normes de ces formats standards évoluent de version en version et les logiciels dont on dispose ne parlent pas toujours la même version. D'autre part, beaucoup de logiciels prennent des libertés avec la norme ou ne reconnaissent qu'une partie des entités normalisées. Le résultat est que le transfert d'une géométrie d'un logiciel de CAO vers un logiciel d'éléments finis se fait rarement sans pertes ! Il faut généralement retoucher la géométrie reçue avec les outils du préprocesseur du logiciel d'éléments finis.

3.2 Définition des sous domaines Ω_i

Le domaine Ω étant défini, il faut maintenant le diviser en sous domaines Ω_i, appelés *mailles*. Cette opération est appelée *maillage*.

3.2.1 Quelques «évidences»

– Si le domaine Ω est un volume, les mailles sont des volumes

4. Les concepteurs de logiciels d'éléments finis ont tendance à considérer que cette phase de travail est annexe, et ils n'y apportent pas toujours le soin qui conviendrait pour répondre aux besoins de l'utilisateur. Une des raisons est que les initiateurs d'un projet de logiciel d'éléments finis sont souvent des scientifiques spécialistes dans le domaine du calcul, et les questions relatives aux interfaces utilisateurs les intéressent peu. Les logiciels de CAO sont souvent plus efficaces pour la définition de géométries complexes.

- Si le domaine Ω est une surface bornée, les mailles sont des surfaces bornées portées par la surface Ω.
- Si le domaine Ω est une portion de ligne, les mailles sont des portions de lignes portées par la ligne Ω.

Une certaine confusion règne dans le vocabulaire employé en ce qui concerne les problèmes qualifiés de «3D», «2D» ou «1D»:

- Dans certains contextes, «2D» signifie que les points du domaine Ω sont repérés par deux réels sur une surface quelconque plongée dans l'espace physique à 3 dimensions; dans d'autres contextes, «2D» signifie que l'espace physique possède seulement deux dimensions [5], il s'agit alors de *problèmes plans*.
- Dans certains contextes, «1D» signifie que les points du domaine Ω sont repérés par un réel sur une ligne quelconque plongée dans l'espace physique à 3 dimensions; dans d'autres contextes, «1D» signifie que l'espace physique possède seulement une dimension, il s'agit alors de problèmes sur une droite.
- Dans la plupart des logiciels, il existe une option dite «axisymétrique»: Elle signifie que le domaine Ω *et les conditions aux limites* sont invariants par rotation autour d'un axe fixe. Dans ce cas, on fait des économies de maillage:
  - Pour définir un volume axisymétrique, on ne définit *qu'une section méridienne du volume*, c'est à dire une surface. Faut-il appeler ces problèmes «2D» ou «3D»?
  - Pour définir une surface axisymétrique, on ne définit *qu'une section méridienne de la surface*, c'est à dire une ligne. Faut-il appeler ces problèmes «1D», «2D» ou «3D»?

Dans ce cours on évitera d'employer les qualificatifs «1D», «2D» ou «3D».

3.2.2 Les mailles disponibles

Les logiciels d'éléments finis disposent de 3 sortes de mailles:

Les mailles linéiques : Elles servent à mailler une courbe qui peut représenter le domaine linéique Ω (plongé dans un espace physique à 2 ou 3 dimensions) ou une section méridienne d'un domaine surfacique Ω axisymétrique.
Certains logiciels n'offrent que des mailles droites.

Les mailles surfaciques : Elles servent à mailler une surface qui peut représenter le domaine surfacique Ω (plongé dans un espace physique à 2 ou 3 dimensions [6]) ou une section méridienne [7] d'un domaine volumique Ω axisymétrique.

La plupart des logiciels ne disposent que de triangles et de quadrangles curvilignes portés par la surface. Certains n'offrent que des triangles et des quadrangles à arêtes rectilignes [8].

Les mailles volumiques : Les mailles sont des volumes. La plupart des logiciels ne disposent que de tétraèdres, pentaèdres ou hexaèdres curvilignes (voir figure 3.1). Certains n'offrent que des tétraèdres, pentaèdres ou hexaèdres à arêtes rectilignes [9].

5. et donc que toutes les grandeurs physiques associées au problème sont des tenseurs de cet espace (vecteur déplacement, tenseur plans de déformation, etc).
6. Une surface plongée dans un espace physique de dimension 2 est une surface plane (en physique classique, l'espace physique est non courbe).
7. donc plane
8. Tous les points de la maille ne sont donc pas exactement sur la surface!
9. Tous les points de la maille ne sont donc pas nécessairement dans le volume, et il peut exister des points de Ω qui ne sont pas dans une maille.

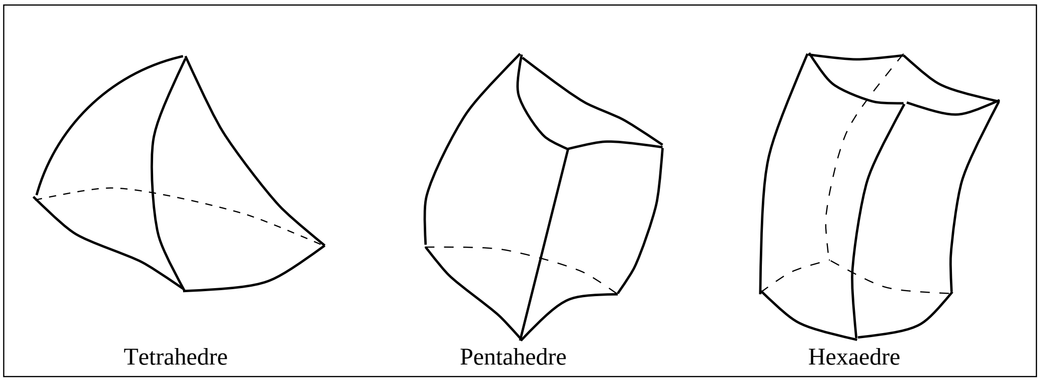

FIG. 3.1 – *Mailles volumiques*

On voit donc que, suivant les possibilités des mailleurs, la géométrie de Ω est plus ou moins approchée [10].

3.2.3 Les méthodes de maillage

La plupart des logiciels proposent différents algorithmes pour générer plus ou moins automatiquement des maillages. La phase de maillage est sans doute celle où on passe le plus de temps dans la définition d'un problème ! Obtenir un «bon maillage» résulte d'une certaine expérience et d'une certaine intuition sur le résultat du calcul. On peut cependant dégager quelques règles générales à suivre:

- Les mailles doivent être «bien proportionnées», c'est à dire que le rapport de leur plus grande dimension sur leur plus petite dimension doit être aussi voisin de 1 que possible. Dans la pratique, on ne devrait pas dépasser 5. Ce rapport est appelé *distorsion*[11] de la maille.
  Dans un maillage surfacique, les mailles idéales sont les triangles équilatéraux, et les carrés. Dans un maillage volumique, les mailles idéales sont les tétraèdres réguliers et les cubes.
- Le maillage ne doit pas être inutilement fin. On verra plus loin que plus le maillage est fin, plus le calcul est coûteux. On a à faire un compromis entre la finesse de la représentation géométrique et le coût du calcul. Quand on a une intuition du résultat final on peut décider de mailler grossièrement dans certaines régions et plus finement dans d'autres. Il peut arriver que l'examen des résultats d'un calcul amènent à le recommencer avec un maillage remanié.
- Dans certains calculs [12], certains experts pensent qu'on obtient de meilleurs résultats avec des quadrangles pour les maillages surfaciques, et avec des hexaèdres pour les maillages volumiques.

Il n'est pas toujours évident de satisfaire à ces règles avec les algorithmes de maillage dont on dispose.

Parmi les algorithmes qu'on trouve dans les logiciels, on peut citer :

le maillage de Delaunay : Cet algorithme est assez général : il peut mailler en triangles toute surface définie par son contour maillé. L'algorithme garantit une faible distorsion des triangles

10. On verra plus loin, en 4.4.2 page 32 que même si le mailleur respecte exactement la forme des arêtes et des surfaces, on fait quand même une autre approximation géométrique!

11. Il existe d'autres définitions de la distorsion : pour un maillage surfacique, c'est le rapport entre le rayon du cercle circonscrit et le rayon du cercle inscrit. Pour les maillages volumiques, c'est le rapport entre le rayon de la sphère circonscrite et le rayon de la sphère inscrite. On peut aussi considérer le plus petit angle entre deux arêtes ayant un sommet commun, ou encore le plus petit angle entre deux faces ayant une arête commune.

12. notamment en plasticité

générés. Il existe aussi une version volumique de cet algorithme qui génère des tétraèdres [13]. La finesse du maillage est contrôlée par la finesse de maillage des contours (ou des surfaces [14]) limites. Certaines versions de cet algorithme permettent aussi de piloter le raffinement dans certaines zones ou autour de certains points à l'intérieur du domaine.

le maillage «topologique» : Le contour d'une surface est divisé en quatre lignes, chacune d'elles est maillée de telle manière que deux lignes opposées aient le même nombre de mailles. La surface à mailler est alors topologiquement équivalente à un rectangle. Le maillage de la surface est obtenu par «transport» d'un maillage régulier du rectangle sur la surface. La méthode de «transport» peut être une simple projection ou une méthode plus élaborée.

La même méthode existe en considérant la surface topologiquement équivalente à un disque [15].

Ces algorithmes existent aussi en version volumique. Le volume topologiquement équivalent peut être un parallélépipède, un cylindre ou une sphère.

Ces méthodes ne garantissent rien sur la distorsion des mailles obtenues, et il faut souvent procéder par tâtonnements successifs.

le maillage «par déplacement» : On impose à une ligne maillée de se «déplacer» le long d'un chemin maillé ou suivant un mouvement simple (translation ou rotation). On génère ainsi une maillage de quadrangles. La même méthode est employée pour mailler des volumes : on «déplace» une surface maillée.

Là encore, ces méthodes ne garantissent rien sur la distorsion des mailles obtenues, et il faut souvent procéder par tâtonnements successifs.

le maillage par sous domaines : On divise le domaine (volume ou surface) à mailler en sous domaines de forme plus simple, faciles à mailler avec l'une des méthodes ci-dessus. La principale difficulté de cette méthode est de s'assurer de la cohérence du maillage aux interfaces entre les sous domaines : *les maillages aux interfaces entre sous domaines doivent coincider.* Ce n'est pas évident à obtenir quand on utilise des algorithmes différents dans des sous domaines voisins.

le maillage manuel : Si aucun des algorithmes dont on dispose ne donne satisfaction, c'est le dernier recours ! On définit les mailles individuellement. C'est parfois nécessaire dans certains sous domaines, ou pour «raccorder» des sous domaines.

Comme on le voit, le maillage d'un domaine de forme complexe n'est pas trivial. On ne le réussit que rarement du premier coup. Il faut essayer de combiner les outils de maillage dont on dispose pour obtenir quelque chose de satisfaisant.

3.2.4 L'importation d'un maillage

Si les outils de maillage du préprocesseur sont insuffisants, on peut tenter de le faire dans d'autres logiciels. Notamment, un certain nombre de logiciels de CAO ont des fonctionnalités de maillage.

Les problèmes de communication entre maillages issus de logiciels différents sont les mêmes que pour les échanges de géométries : il faut qu'il existe un format de fichier connu par les deux logiciels, et qu'ils utilisent des versions voisines. On peut aussi développer soi-même un «traducteur» [16].

13. Actuellement, on ne connaît pas d'algorithme général qui génère des quadrangles ou des hexaèdres garantis bien proportionnés.

14. qui peuvent elle-mêmes être un maillage de Delaunay.

15. Il faut alors choisir un point dans la surface comme «centre» de la surface. Cette méthode est parfois appelée *maillage rayonnant*, car le disque de référence est maillé par des rayons et des cercles concentriques.

16. C'est plus facile pour les maillages que pour les géométries, car la description d'un maillage est plus simple que celle d'une géométrie : l'information se réduit à la liste des coordonnées des sommets, et les mailles sont une liste de numéros de sommet (dans un certain ordre, qui varie, bien sur, d'un logiciel à l'autre).

Chapitre 4

Les éléments et leur espace de fonctions d'interpolation

Les solutions approchées trouvées par la méthode des éléments finis sont une juxtaposition $\widetilde{F}$ de champs locaux $\widetilde{f}_i$ définis dans chaque maille. L'objet de ce chapitre est de monter comment on définit dans les mailles une famille de champs locaux dans laquelle la méthode des éléments finis pourra choisir pour s'approcher au mieux de la solution.

Pour qu'une maille devienne un élément, il faut :

– Choisir arbitrairement des *nœuds* dans la maille. Comme on le verra plus loin, la résolution d'un problème par la méthode des éléments finis se ramène à calculer les valeurs de la solution approchée aux nœuds du maillage.
Le nombre d'inconnues scalaires par nœud varie selon la nature tensorielle du champ inconnu et selon la dimension de l'espace physique. Ce nombre est appelé *nombre de degrés de liberté*[1] (abréviation courante : ddl).
Par exemple, si le champ cherché est un champ vectoriel dans un espace physique à 3 dimensions, on a 3 ddl par nœuds (1 ddl par composante du champ)

– Choisir arbitrairement une famille de champs locaux, destinés à donner une valeur approchée de la solution en tout point de la maille en ne connaissant que les valeurs d'une solution approchée aux nœuds de l'élément. Cette famille de fonctions s'appelle *l'espace des fonctions d'interpolation de la maille.*
S'il y a plusieurs inconnues par nœud (c'est à dire plusieurs degrés de liberté), on construit des interpolations pour chacun des degrés de liberté. En général, les interpolations de chaque degré de liberté appartiennent au même espace de fonctions d'interpolation[2].

Dans ce chapitre, on va montrer comment on construit les interpolations. On le fera en supposant qu'il n'y a qu'un seul ddl par nœud. S'il y en a plusieurs on procède de même pour chaque ddl.

Pour construire les espaces de fonctions d'interpolation sur un élément, on va procéder en deux temps : on construit un espace de fonctions d'interpolation $\widetilde{f}_r$ sur une *maille de référence* standard topologiquement équivalente à la maille réelle, puis on le transforme pour qu'il devienne un espace de fonctions d'interpolation $\widetilde{f}$ sur les mailles réelles. Ce procédé a l'avantage de faire gagner du

1. Cette dénomination est un héritage des précurseurs de la méthode des éléments finis : c'étaient des mécaniciens et les inconnues étaient donc les déplacements aux nœuds. Ce n'est que plus tard que cette méthode a été utilisée pour d'autres problèmes de physique.
2. mais ce n'est pas obligatoire : certains calculs en mécanique des fluides utilisent des familles d'interpolation différentes pour le champ des vitesses et le champ des pressions.

temps calcul. Les logiciels proposent des bibliothèques d'éléments dans lesquels les interpolations dans les mailles de référence sont déjà définies et n'ont plus à être recalculées.

4.1 Définition des mailles de référence

Dans un maillage, toutes les mailles ont des formes et des dimensions différentes. On trouve des mailles linéiques, des mailles surfaciques et des mailles volumiques de toutes formes et de toutes tailles. Dans le but d'uniformiser et d'automatiser les calculs, on introduit la notion de maille de référence. On ne donne ici que les mailles les plus classiques. Par convention généralement admise (voir figure 4.1) :

La maille de référence linéique est le segment $x_1 \in [-1, 1]$.

La maille de référence surfacique triangulaire est le triangle
$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_1 + x_2 \leq 1$.

La maille de référence surfacique quadrangulaire est le carré
$x_1 \in [-1, 1]$; $x_2 \in [-1, 1]$

La maille de référence volumique tétraédrique est le tétraèdre
$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$; $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$.

La maille de référence volumique pentaédrique est le pentaèdre (prisme à base triangulaire) $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_1 + x_2 \leq 1$; $x_3 \in [-1, 1]$.

La maille de référence volumique hexaédrique est le cube
$x_1 \in [-1, 1]$; $x_2 \in [-1, 1]$; $x_3 \in [-1, 1]$.

où x_1, x_2 et x_3 sont les coordonnées d'un point courant m de la maille de référence.

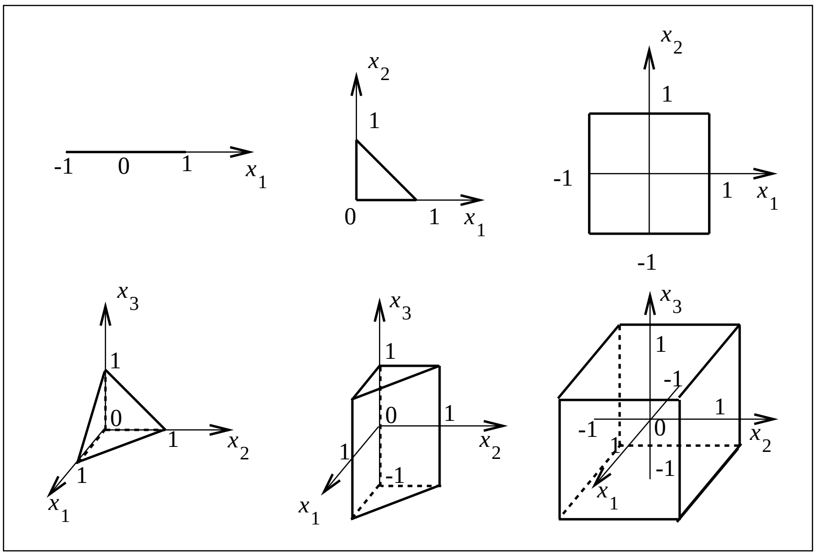

FIG. 4.1 – *Mailles de référence*

4.2 Interpolation polynômiale sur les mailles de référence

Les fonctions d'interpolations utilisées dans les logiciels sont pratiquement toujours des polynômes. Si la fonction à interpoler est vectorielle ou tensorielle, on interpole de la même manière chacune des composantes. On est donc ramené à des interpolations de champs scalaires. Dans la suite, $\widetilde{f}_r$ représente donc soit l'interpolation d'un champ scalaire soit l'interpolation d'une composante de champ vectoriel ou tensoriel.

- Pour les mailles linéiques $\widetilde{f}_r$ est un polynôme de x_1,
- Pour les mailles surfaciques $\widetilde{f}_r$ est un polynôme de x_1 et x_2,
- Pour les mailles volumiques $\widetilde{f}_r$ est un polynôme de x_1, x_2 et x_3.

4.2.1 Rappels sur les bases de polynômes

L'espace des polynômes de degré d est un espace vectoriel dont la dimension dépend du degré des polynômes et du nombre de variables. Cet espace possède une *base canonique* constituée de tous les monômes de degré non négatif inférieur ou égal à d. Par exemple :

- La base canonique des polynômes à une variable x_1 de degré 3 est constituée des monômes $\{1\ ,\ x_1\ ,\ x_1^2\ ,\ x_1^3\}$.
- La base canonique des polynômes à deux variables x_1 et x_2 de degré 2 est constituée des monômes $\{1\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_1^2\ ,\ x_2^2\ ,\ x_1x_2\}$.
- La base canonique des polynômes à trois variables x_1, x_2 et x_3 de degré 2 est constituée des monômes $\{1\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_1^2\ ,\ x_2^2\ ,\ x_3^2\ ,\ x_1x_2\ ,\ x_2x_3\ ,\ x_3x_1\}$.

Le tableau qui suit donne les dimensions des espaces de polynômes pour des degrés de 1 à 5 pour les polynômes à 1, 2 ou 3 variables.

degré	1 variable	2 variables	3 variables
1	2	3	4
2	3	6	10
3	4	10	20
4	5	15	35
5	6	21	56

À partir de la base canonique, on peut engendrer une infinité de bases : Si n est la dimension de l'espace de polynômes, toute matrice régulière $n \times n$ définit une autre base.
Par exemple les 6 polynômes $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ sont une base de l'espace des polynômes de degré 2 à 2 variables:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}$$

si la matrice des p_{ij} est régulière[3].

Si on extrait d'une base une sous base de m polynômes de base, on engendre un sous espace vectoriel de dimension m.

3. Certaines bases ou sous bases avec des propriétés particulières ont reçu des noms : Gegenbauer, Hermite, Jacobi, Laguerre, Legendre, Tchebicheff...

4.2.2 Interpolation polynômiale sur une maille de référence

Soit E_r l'espace de référence, et soit m un point courant de E_r. Suivant le type de maille (linéique, surfacique ou volumique), le point m a 1, 2 ou 3 coordonnées. On note d la dimension de l'espace de référence[4].

Pour définir une interpolation, on choisit arbitrairement n points $(n > d)$ dans l'espace de référence appelés *nœuds de référence* qu'on note $m^{(j)}$; $j = 1, \ldots, n$.

Une interpolation polynômiale $\widetilde{f}_r$ sur l'élément de référence E_r est définie par :

$$\widetilde{f}_r(m) = \sum_{i=1}^{n} u^{(i)} P^{(i)}(m) \tag{4.1}$$

$$\text{telle que} \quad \widetilde{f}_r(m^{(j)}) = \sum_{i=1}^{n} u^{(i)} P^{(i)}(m^{(j)}) = u^{(j)} \quad \forall j \in [1, \cdots, n] \tag{4.2}$$

où les $P^{(i)}(m)$ sont des polynômes de d_r variables, et où les $u^{(j)}$ sont n valeurs données aux nœuds $m^{(j)}$.
Autrement dit, une interpolation $\widetilde{f}_r$ attribue une valeur $\widetilde{f}_r(m)$ à tout point m, et sa valeur aux n nœuds $m^{(j)}$ est $u^{(j)}$.

La définition (4.1) montre que $\widetilde{f}_r(m)$ appartient à un espace de polynômes engendré par les n polynômes $P^{(i)}$. Si ces polynômes sont une base, l'espace des interpolations $\widetilde{f}_r$ est de dimension n. C'est généralement ce qu'on souhaite : à chaque n-uplet de valeurs aux nœuds données $u^{(i)}$, on veut une interpolation différente.

Dans une interpolation polynômiale à n nœuds, les $P^{(i)}$ doivent être une n-base de polynômes.

Soit $\{B_k(m)\}$ une n-base de polynômes connue. On peut donc écrire :

$$P^{(i)}(m) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} B_k(m)$$

où les $a_k^{(i)}$ sont le terme général d'une matrice régulière.

La condition (4.2) implique les n^2 égalités:

$$P^{(i)}(m^{(j)}) = \delta_{ij} \tag{4.3}$$

soit encore :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} B_k(m^{(j)}) = \delta_{ij}$$

ou encore sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} a_1^{(1)} & \ldots & a_k^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{(i)} & \ldots & a_k^{(i)} & \ldots & a_n^{(i)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{(n)} & \ldots & a_k^{(n)} & \ldots & a_k^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1(m^{(1)}) & \ldots & B_1(m^{(j)}) & \ldots & B_1(m^{(n)}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_k(m^{(1)}) & \ldots & B_k(m^{(j)}) & \ldots & B_k(m^{(n)}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_n(m^{(1)}) & \ldots & B_n(m^{(j)}) & \ldots & B_n(m^{(n)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

4. C'est aussi la dimension de la maille réelle.

ce qui montre que la matrice $[P]$ des coefficients des polynômes $P^{(i)}$ sur la base $\{B_k\}$ est l'inverse de la matrice $[C]$ des valeurs des polynômes de la base B_k aux nœuds. La matrice $[C]$ doit donc être régulière [5] et les coefficients des polynômes de base de l'interpolation sont donnés par :

$$\boxed{[P] = [C]^{-1}}$$

Ainsi, les coefficients des polynômes de base de l'interpolation dans l'espace de référence sont déterminés par les coordonnées des nœuds dans la maille de référence [6] et par le choix de la base $\{B_k(m)\}$. Le calcul de $[P]$ est très simple: il suffit de construire $[C]$ de terme général $C_{kj} = B_k(m^{(j)})$ et de l'inverser.

En résumé, une interpolation $\widetilde{f}_r$ sur une maille de référence est caractérisée par :

- la dimension de l'espace de référence (linéique, surfacique, volumique), c'est à dire le nombre de coordonnées dans l'espace de référence
- le choix de n nœuds par leurs coordonnées dans l'espace de référence
- le choix de la base $\{B_k(m)\}$

On en déduit la matrice $[P]$ des coefficients des polynômes de base de l'interpolation.

Les polynômes $P^{(i)}$ (polynômes de base de l'interpolation) sont appelés *fonctions de forme*.

4.2.3 Exemple 1 (standard)

On prend une maille surfacique (les variables sont donc x_1 et x_2), et on veut construire une interpolation à 4 nœuds (voir figure 4.2) dont les coordonnées sont:

$$m^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \ ; \ m^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \ ; \ m^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) \ ; \ m^{(4)} = (x_1^{(4)}, x_2^{(4)})$$

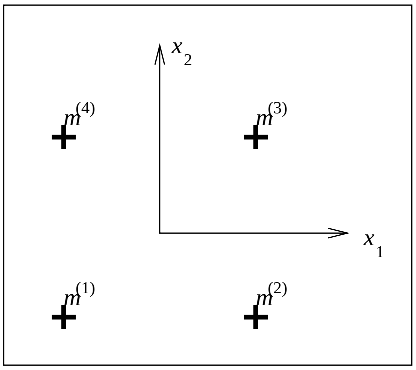

FIG. 4.2 – *Interpolation à 4 nœuds dans un élément de référence surfacique*

L'interpolation est donc de la forme :

$$\widetilde{f}_r(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{4} u^{(i)} P^{(i)}(x_1, x_2)$$

5. ce qui signifie géométriquement que les k points doivent être distincts, non alignés dans une maille surfacique non colinéaires dans une maille surfacique et non coplanaires dans une maille volumique.

6. En général ils sont standardisés. Ce ne sont donc pas de vraies variables.

Les fonctions de forme $P^{(i)}$ sont une base de polynômes à deux variables de dimension 4. Le tableau page 25 montre qu'on peut travailler dans un sous espace des polynômes de degré 2. On peut choisir comme sous base canonique $\{B_k\}$ les quatre polynômes $(B_1 = 1, B_2 = x_1, B_3 = x_2, B_4 = x_1x_2)$ de la base canonique [7].
Les conditions (4.2) s'écrivent :

$$\begin{array}{llll}
P^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 1 & P^{(1)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0 & P^{(1)}(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) = 0 & P^{(1)}(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}) = 0 \\
P^{(2)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 0 & P^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 1 & P^{(2)}(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) = 0 & P^{(2)}(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}) = 0 \\
P^{(3)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 0 & P^{(3)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0 & P^{(3)}(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) = 1 & P^{(3)}(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}) = 0 \\
P^{(4)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 0 & P^{(4)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0 & P^{(4)}(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) = 0 & P^{(4)}(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}) = 1
\end{array}$$

En posant $P^{(i)} = a_1^{(i)} + a_2^{(i)}x_1 + a_3^{(i)}x_2 + a_4^{(i)}x_1x_2$, on construit une 4-base de polynômes $P^{(i)}$ si la matrice des $a_j^{(i)}$ est régulière. Les conditions (4.2) s'écrivent alors:

$$\begin{bmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & x_1^{(4)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & x_2^{(4)} \\ x_1^{(1)}x_2^{(1)} & x_1^{(2)}x_2^{(2)} & x_1^{(3)}x_2^{(3)} & x_1^{(4)}x_2^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On en déduit les coefficients des fonctions de forme par inversion

$$\begin{bmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & x_1^{(4)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & x_2^{(4)} \\ x_1^{(1)}x_2^{(1)} & x_1^{(2)}x_2^{(2)} & x_1^{(3)}x_2^{(3)} & x_1^{(4)}x_2^{(4)} \end{bmatrix}^{-1}$$

Par exemple, si on prend comme nœuds les points $(-1,-1), (1,-1), (1,1), (-1,1)$ dans l'espace de référence :

$$\begin{bmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Les quatre fonctions de forme de cet élément sont donc :

$$\begin{bmatrix} P^{(1)} \\ P^{(2)} \\ P^{(3)} \\ P^{(4)} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}$$

7. Il s'agit bien d'un choix ! Quatre polynômes de degré 2 quelconques mais indépendants peuvent convenir. On s'arrange généralement pour garder des monômes de la base canonique tels que les rôles des variables aient une certaine «symétrie». L'interpolation obtenue présente alors une certaine «isotropie». On pouvait prendre aussi une sous base de l'espace des polynômes de degré 3.

soit encore :

$$
\begin{aligned}
P^{(1)}(x_1,x_2) &= \frac{1}{4}\,(1-x_1-x_2+x_1x_2)\\
P^{(2)}(x_1,x_2) &= \frac{1}{4}\,(1+x_1-x_2-x_1x_2)\\
P^{(3)}(x_1,x_2) &= \frac{1}{4}\,(1+x_1+x_2+x_1x_2)\\
P^{(4)}(x_1,x_2) &= \frac{1}{4}\,(1-x_1+x_2-x_1x_2)
\end{aligned}
$$

et l'interpolation en fonction des valeurs aux nœuds est :

$$\widetilde{f}_r(x_1,x_2) = u^{(1)}P^{(1)}(x_1,x_2) + u^{(2)}P^{(2)}(x_1,x_2) + u^{(3)}P^{(3)}(x_1,x_2) + u^{(4)}P^{(4)}(x_1,x_2)$$

4.2.4 Exemple 2 (non standard)

On construit une interpolation à 7 nœuds dans une maille surfacique (voir figure 4.3).

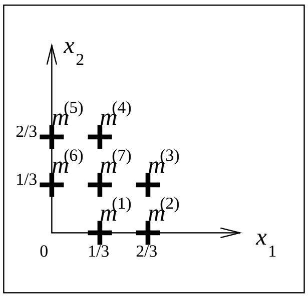

FIG. 4.3 – *Interpolation à 7 nœuds dans un élément de référence surfacique*

L'espace d'interpolation est de dimension 7. Le tableau page 25 montre qu'il faut prendre au minimum des polynômes de degré 3. On peut prendre, par exemple, comme sous base $\{B_k\}$ de la base canonique la suite de monômes suivante :
$\big\{B_1 = 1, B_2 = x_1, B_3 = x_2, B_4 = x_1^2, B_5 = x_2^2, B_6 = x_1^2x_2, B_7 = x_1x_2^2\big\}$.

La matrice $[C]$ de terme général $C_{kj} = B_k(m^{(j)})$ est :

$$[C] = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\
\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{9}\\
0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9}\\
0 & 0 & \frac{4}{27} & \frac{2}{27} & 0 & 0 & \frac{1}{27}\\
0 & 0 & \frac{2}{27} & \frac{4}{27} & 0 & 0 & \frac{1}{27}
\end{bmatrix}$$

dont l'inverse est :

$$[P] = \begin{bmatrix}
\frac{5}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{45}{8} & -\frac{27}{8} & \frac{45}{8} & \frac{81}{8} & -\frac{27}{8}\\
-\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{9}{8} & \frac{27}{8} & -\frac{9}{8} & -\frac{81}{8} & \frac{27}{8}\\
\frac{1}{4} & -\frac{9}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{81}{8} & -\frac{27}{8}\\
\frac{1}{4} & -\frac{9}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{27}{8} & \frac{81}{8}\\
-\frac{1}{4} & \frac{9}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{27}{8} & \frac{27}{8} & -\frac{81}{8}\\
\frac{5}{4} & -\frac{45}{8} & \frac{3}{8} & \frac{45}{8} & -\frac{27}{8} & -\frac{27}{8} & \frac{81}{8}\\
-\frac{3}{2} & \frac{27}{4} & \frac{27}{4} & -\frac{27}{4} & -\frac{27}{4} & -\frac{27}{4} & -\frac{27}{4}
\end{bmatrix}$$

Ce qui donne les coefficients des fonctions de forme.

4.3 Continuité C_0 inter-éléments : Les éléments conformes

On souhaite généralement que la solution approchée trouvée présente une continuité C_0 inter-élément. Les éléments qui ont cette propriété sont appelés *éléments conformes*.

Pour les mailles linéiques, la continuité C_0 est facile à assurer : Il suffit de mettre des nœuds aux extrémités de la mailles. On est ainsi assuré que les fonctions d'interpolation prennent la même valeur au nœud commun.

Dans la suite on ne parlera que de la conformité des éléments surfaciques et volumiques.

On remplit *partiellement* cette condition en choisissant de mettre des nœuds sur la frontière des éléments [8]. On garantit ainsi que la solution approchée pour deux éléments voisins est continue au moins aux nœuds communs sur la frontière commune.
Si on choisit les fonctions d'interpolation telles que :
la valeur de l'interpolation sur une frontière ne dépend que des nœuds de la frontière , on garantit que la solution approchée est continue C_0 à la traversée de la frontière [9].

Autrement dit, sur une arête d'élément conforme surfacique, l'interpolation doit se réduire à une interpolation de maille linéique sur les nœuds de l'arête ; et sur une face d'élément conforme volumique, l'interpolation doit se réduire à une interpolation de maille surfacique sur les nœuds de la face.

Considérons un élément de référence et deux frontières voisines de cet élément, notées $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{F}_j$. Si l'élément est conforme, la valeur de l'interpolation sur $\mathcal{F}_i$ ne dépend que des nœuds de $\mathcal{F}_i$. De même pour $\mathcal{F}_j$. Sur l'intersection des frontières, l'interpolation ne doit dépendre que des nœuds communs aux deux frontières. Il faut donc qu'elles aient des nœuds communs. On en déduit qu'un élément de référence conforme a nécessairement des nœuds à ses sommets.
On voit par exemple que si les nœuds de l'exemple 2 page 29 sont ceux d'un élément triangulaire tel que celui de la figure 4.1 page 24, l'interpolation de cet élément n'est pas conforme.

Mais cette condition n'est pas suffisante. Il faut donc vérifier la conformité des interpolations, c'est à dire :
Soit $\mathcal{F}$ une frontière de l'élément de référence. On note $\mathcal{I}_\mathcal{F}$ l'ensemble des nœuds appartenant à la frontière $\mathcal{F}$, et on note $\bar{\mathcal{I}}_\mathcal{F}$ le reste des nœuds. Soit $m_\mathcal{F}$ un point appartenant à la frontière. La conformité de l'élément s'écrit (pour chaque frontière):

$$P^{(i)}(m_\mathcal{F}) = 0 \ \ \forall i \in \bar{\mathcal{I}}_\mathcal{F} \ ; \ \forall m_\mathcal{F} \in \mathcal{F}$$

Pour construire des éléments conformes, il faut donc adjoindre les conditions ci-dessus [10] aux conditions d'interpolation 4.3 page 26.

Par exemple, si les quatre nœuds de l'exemple 1 précédent sont les sommets d'un élément de référence carré, on vérifie facilement que l'interpolation sur cet élément est bien conforme.

Les principaux éléments de référence conformes qu'on trouve dans les logiciels sont :

- les éléments linéiques dont deux de leurs nœuds sont les extrémités
- les triangles à 3 nœuds (sommets)
- les triangles à 6 nœuds (sommets + milieux des arêtes)

8. avec une règle de position des nœuds telle que deux éléments voisins aient des nœuds confondus sur leur frontière commune.

9. La juxtaposition des interpolations des élements conformes est alors une fonction C_0 définie sur Ω, et qui appartient donc à l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(\Omega)$. C'est pour des solutions approchées appartenant à cet espace que les théorèmes de convergence de la méthode sont établis.

10. La condition $m_\mathcal{F} \in \mathcal{F}$ est généralement une relation linéaire entre les coordonnées, car les frontières des éléments de référence sont des droites ou des plans. Le polynôme $P^{(i)}((m_\mathcal{F})$ est donc un polynôme à une ou deux variables qui doit être identiquement nul, c'est à dire que les coefficients de tous ses momômes sont nuls.

- les quadrangles à 4 nœuds (sommets)
- les quadrangles à 8 nœuds (sommets + milieux des arêtes)
- les tétraèdres à 4 nœuds (sommets)
- les tétraèdres à 10 nœuds (sommets + milieux des arêtes)
- les tétraèdres à 20 nœuds (sommets + nœuds au tiers des arêtes)
- les pentaèdres à 6 nœuds (sommets)
- les pentaèdres à 15 nœuds (sommets + milieux des arêtes)
- les pentaèdres à 24 nœuds (sommets + nœuds au tiers des arêtes)
- les hexaèdres à 8 nœuds (sommets)
- les hexaèdres à 20 nœuds (sommets + milieux des arêtes)
- les hexaèdres à 27 nœuds (sommets + milieux des arêtes + milieux des faces + nœud central)
- des hexaèdres à 32 nœuds (sommets + nœuds au tiers des arêtes)

On trouve dans la littérature spécialisée un grand nombre d'élements tout calculés. Le choix dans les logiciels est plus ou moins riche. L'utilisateur a seulement à se préoccuper de connaître le degré d'interpolation utilisé dans les éléments qu'il choisit, pour estimer sa «souplesse» pour approcher une solution exacte : Pour un maillage donné[11] il est plus facile d'approcher une solution exacte avec des polynômes de degré 2 qu'avec des interpolations linéaires. Pour bien approcher la solution avec des interpolations linéaires, il faut un maillage plus fin.

4.4 Interpolation dans l'élément réel

Les coordonnées des nœuds de l'élément réel sont différentes de celles de l'élément de référence. Il convient donc de construire des fonctions d'interpolation $\widetilde{f}$ sur l'élément réel en utilisant les interpolations $\widetilde{f}_r$ construites sur les éléments de référence.

4.4.1 Principe de construction

Soient m un point de l'élément de référence, et M un point de l'élément réel.

Soient $\widetilde{f}_r(m)$ la fonction d'interpolation connue sur l'élément de référence, et $\widetilde{f}(M)$ la fonction d'interpolation cherchée sur l'élément réel.

Considérons une transformation τ *inversible* qui à tout point m de l'élément de référence associe un point M de l'élément réel :

$$\tau \;:\; m \in \text{élément de référence} \;\longleftrightarrow\; M = \tau(m) \in \text{élément réel}$$

telle que les nœuds se correspondent :

$$M^{(i)} = \tau(m^{(i)})$$

Considérons l'application $\widetilde{f}$ définie par :

$$\widetilde{f} \;:\; M \in \text{élément réel} \;\longrightarrow\; \widetilde{f}(M) = \widetilde{f}_r(m) \;\; \forall M = \tau(m)$$

11. C'est à dire pour une division en sous domaines donnée.

On a donc :

$$\widetilde{f}(M) = \widetilde{f}(\tau(m)) = \widetilde{f}_r(m) \;\; \forall m \in \text{élément de référence}$$

soit encore :

$$\boxed{\widetilde{f} \circ \tau = \widetilde{f}_r \iff \widetilde{f} = \widetilde{f}_r \circ \tau^{-1}}$$

L'application $\widetilde{f}$ est une interpolation sur l'élément réel car :

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(M) = \widetilde{f}_r(m) &= \sum_{i=1}^{n} u^{(i)} P^{(i)}(m) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u^{(i)} P^{(i)}(\tau^{-1}(M)) \\ \text{et} \\ \widetilde{f}(M^{(i)}) = \widetilde{f}_r(m^{(i)}) &= u^{(i)} \end{aligned}$$

On doit noter que si $\widetilde{f}_r$ est une interpolation polynômiale, $\widetilde{f}$ n'en est pas une en général, car $P^{(i)}(\tau^{-1}(M))$ n'est pas un polynôme en M en général.

4.4.2 Choix de la transformation τ : l'approximation géométrique

On cherche idéalement une transformation τ qui fait correspondre les points m de la maille de référence aux points M de la maille réelle, telle que

1. la transformation τ est inversible
2. la transformation τ fait correspondre les frontières
3. la transformation τ fait correspondre les nœuds :

$$M^{(i)} = \tau(m^{(i)})$$

Malgré le nombre de conditions imposées à τ, il y a une infinité de solutions à ce problème [12], mais ces transformations sont compliquées à trouver, surtout lorsque la géométrie de l'élément réel est compliquée. On va donc chercher des transformations τ plus simples.

La condition impérative pour que $\widetilde{f}$ soit une interpolation est la correspondance des nœuds. On va choisir des transformations τ *qui ne respectent que cette condition.*
La conséquence, est que si on appelle M' le transformé de m, en général M' n'appartient pas à l'élément réel, sauf si m est un nœud. Cela signifie que :

- Pour les éléments linéiques, la courbe des points $M' = \tau(m)$ est différente de la courbe réelle de l'élément.
- Pour les éléments surfaciques, la surface des points $M' = \tau(m)$ est différente de la surface réelle de l'élément, ainsi que la courbe des arêtes.
- Pour les éléments volumiques, les arêtes et les faces transformées sont différentes des arêtes et des faces réelles.

12. En effet, on peut imaginer une infinité de transformations qui respectent les frontières et les nœuds et qui «déforment» l'intérieur.

La transformation τ transforme l'élément de référence en une *approximation géométrique* de l'élément réel. Les nœuds de l'approximation géométrique et de l'élément réel sont confondus, mais les autres points sont distincts.

L'interpolation $\widetilde{f} = \widetilde{f}_r \circ \tau^{-1}$ est une interpolation sur une *approximation géométrique* de la maille réelle. Autrement dit, dans un calcul par élements finis, les mailles réelles sont remplacées par leur approximation géométrique, et cette approximation géométrique est déterminée par le choix de τ.

On cherche donc une fonction τ inversible qui fasse correspondre les nœuds, c'est à dire telle que :

$$M^{(i)} = \tau(m^{(i)}) \ \forall \text{nœud } i$$

Ce problème est un problème d'interpolation sur l'élément de référence : Choisir τ, c'est choisir l'interpolation les points M' entre les points $M^{(i)}$. Le problème est donc :

pour les mailles linéiques , trouver trois fonctions d'interpolation $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$ et $\widetilde{X}_3$ telles que :

$$X_1^{(i)} = \widetilde{X}_1(x_1^{(i)}) \qquad X_2^{(i)} = \widetilde{X}_2(x_1^{(i)}) \qquad X_3^{(i)} = \widetilde{X}_3(x_1^{(i)})$$

pour les mailles surfaciques , trouver trois fonctions d'interpolation $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$ et $\widetilde{X}_3$ telles que :

$$X_1^{(i)} = \widetilde{X}_1(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \qquad X_2^{(i)} = \widetilde{X}_2(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \qquad X_3^{(i)} = \widetilde{X}_3(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$$

pour les mailles volumiques , trouver trois fonctions d'interpolation $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$ et $\widetilde{X}_3$ telles que :

$$X_1^{(i)} = \widetilde{X}_1(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) \qquad X_2^{(i)} = \widetilde{X}_2(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) \qquad X_3^{(i)} = \widetilde{X}_3(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$$

où $X_j^{(i)}$ est la $j^{\text{ème}}$ coordonnée dans l'espace physique du nœud réel i , et où $x_j^{(i)}$ est la $j^{\text{ème}}$ coordonnée dans l'espace de référence du nœud de réf{erence i.

Si on prend des interpolations polynômiales, les fonctions d'interpolation des coordonnées sont de la forme [13] :

$$X_1 = \widetilde{X}_1(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)}\, Q^{(i)}(x_1, x_2, x_3) \tag{4.4}$$

$$X_2 = \widetilde{X}_2(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{n} X_2^{(i)}\, Q^{(i)}(x_1, x_2, x_3) \tag{4.5}$$

$$X_3 = \widetilde{X}_3(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{n} X_3^{(i)}\, Q^{(i)}(x_1, x_2, x_3) \tag{4.6}$$

où les $Q^{(i)}$ sont les polynômes de base de l'interpolation géométrique, $i \in [1, ..., n]$, et où n est la dimension de l'espace des fonctions d'interpolation (c'est à dire le nombre de nœuds). *Cette interpolation doit être conforme*, pour que les frontières de deux éléments voisins soient les mêmes [14].

Pour trouver ces interpolations on emploie les mêmes techniques que précédemment, puisque ce ne sont que des interpolations sur l'élément de référence.

Quelques définitions :

- Si la méthode d'interpolation des coordonnées est la même que celle des valeurs aux nœuds on dit que l'élément est *isoparamétrique*. On a alors $[P] = [Q]$

13. On les donne ici pour les éléments volumiques, le lecteur les simplifiera aisément pour les éléments surfaciques ou linéiques.

14. En effet, les sous domaines de l'approximation géométrique Ω' doivent respecter les mêmes règles que les sous domaines de Ω

- Si l'interpolation des coordonnées est de degré inférieur au degré d'interpolation des valeurs aux nœuds on dit que l'élément est *subparamétrique*.
- Si l'interpolation des coordonnées est de degré supérieur au degré d'interpolation des valeurs aux nœuds on dit que l'élément est *superparamétrique*.

Il reste un dernier problème : la transformation $M = \tau(m)$ doit être *inversible*. Il faut donc s'assurer que le déterminant de la matrice jacobienne[15] de la transformation soit non nul en tout point de la maille de référence :

$$\det[J] = \det \begin{bmatrix} \frac{d\widetilde{X}_1}{dx_1} & \frac{d\widetilde{X}_1}{dx_2} & \frac{d\widetilde{X}_1}{dx_3} \\ \frac{d\widetilde{X}_2}{dx_1} & \frac{d\widetilde{X}_3}{dx_2} & \frac{d\widetilde{X}_2}{dx_3} \\ \frac{d\widetilde{X}_3}{dx_1} & \frac{d\widetilde{X}_3}{dx_2} & \frac{d\widetilde{X}_3}{dx_3} \end{bmatrix} \neq 0$$

Les équations (4.4) montrent que son calcul se ramène à des dérivées des polynômes de base $Q^{(i)}$. Le déterminant est donc une fonction des coordonnées réelles des nœuds $X_j^{(i)}$et des variables x_i. Il peut arriver qu'il s'annule pour un certain ensemble de coordonnées nodales ou en certains points non nodaux[16]. Tout bon logiciel se doit de faire cette vérification avant de lancer un calcul[17].

Lorsque le jacobien est non nul partout, on peut alors trouver τ^{-1} en inversant le système (4.4). On trouve trois fonctions $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$ et $\widetilde{x}_3$

$$x_1 = \widetilde{x}_1(X_1, X_2, X_3) \qquad x_2 = \widetilde{x}_2(X_1, X_2, X_3) \qquad x_3 = \widetilde{x}_3(X_1, X_2, X_3) \tag{4.7}$$

Le calcul de la transformation inverse τ^{-1} est difficile, sauf quand l'interpolation des coordonnées est strictement linéaire[18], car dans ce dernier cas, l'inversion de τ se ramène à des calculs algébriques matriciels. On verra plus loin que ce calcul n'est pas nécessaire et qu'il suffit de s'assurer que la transformation est inversible.

Un grand nombre des éléments proposés dans les logiciels ont une interpolation linéaire des coordonnées, mais on trouve aussi des interpolations de coordonnées de degré supérieur, qu'on appelle souvent *éléments courbes*[19]. Dans le cas d'interpolation linéaire des coordonnées :

- Les mailles linéiques et les arêtes sont approximées par des segments de droite joignant les nœuds. S'il y a des nœuds intérieurs, c'est une ligne brisée .
- Les mailles triangulaires et les faces triangulaires à trois nœuds sont approximées par des triangles plans
- Les mailles triangulaires et les faces triangulaires à plus de trois nœuds sont approximées par des surfaces polynômiales compliquées à contour polygonal gauche.

15. Les mécaniciens feront aisément le parallèle avec la transformation d'un milieu continu, d'un domaine Ω_r de référence à un domaine Ω_t actuel. Dans ce cas, la matrice jacobienne n'est autre que la matrice des composantes du *gradient de la transformation* $\boldsymbol{F}$ dans un système de coordonnées cartésiennes, et on doit avoir $\det \boldsymbol{F} \neq 0$.

16. par exemple, si deux nœuds d'un élément réel sont confondus (ou trop proches), ou encore si les trois nœuds d'un triangle réel sont alignés, etc.
Il se peut aussi que le jacobien soit nul en certains points (x_r, y_r, z_r) non nodaux, par exemple si l'approximation géométrique de la maille (linéique, surfacique ou volumique) a des points doubles.

17. Ce n'est malheureusement pas toujours le cas! Certains logiciels se contentent de vérifier seulement que la position des nœuds réels ne conduit pas à une dégénérescence de la géométrie de la maille (volume, surface ou longueur nuls), sans se préoccuper de savoir si l'approximation géométrique de la maille a des points doubles. Ce cas peut notamment se produire lorqu'on fait des calculs par pas : la réactualisation des nœuds du maillage entre chaque pas peut rendre τ non inversible.

18. C'est à dire uniquement dans les éléments linéiques à 2 nœuds, les éléments triangulaires à 3 nœuds et les tétraèdres à 4 nœuds. Dans les autres, l'interpolation ne peut pas être strictement linéaire. Ce sont les seuls cas où l'interpolation sur l'élément réel reste polynômiale.

19. Il convient de ne pas se laisser abuser par la représentation graphique souvent simplifiée des éléments : un élément linéique à 3 nœuds peut parfois être *représenté* par un segment de droite avec les trois nœuds alignés. Il faut connaître les possibilités du mailleur pour savoir si la figure affichée à l'écran représente un élément courbe ou si l'élément est effectivement rectiligne.

- les mailles quadrangulaires et les faces quadrangulaires à quatre nœuds sont approximées par des paraboloïdes hyperboliques.
- les mailles quadrangulaires et les faces quadrangulaires à plus de quatre nœuds sont approximées par des surfaces polynômiales compliquées à contour polygonal gauche.

On peut remarquer que dans le cas des éléments linéiques à 2 nœuds, des éléments triangulaires à 3 nœuds et des éléments tétraédriques à 4 nœuds, les approximations géométriques des lignes et des surfaces n'ont jamais de points doubles. Le jacobien ne peut s'annuler que pour des dégénérescences géométriques (longueurs nulles, surfaces nulles ou volumes nuls). Pour les autres, il convient de vérifier que le jacobien de τ n'est jamais nul non seulement aux nœuds, mais aussi entre les nœuds, c'est à dire que l'approximation géométrique ne contient pas de point double.

Finalement , l'interpolation sur l'approximation géométrique de l'élément réel est [20]:

$$\boxed{\widetilde{f}\left(X_1,X_2,X_3\right)=\sum_{i=1}^{n}u^{(i)}\,P^{(i)}\left(\widetilde{x}_1\left(X_1,X_2,X_3\right),\widetilde{x}_2\left(X_1,X_2,X_3\right),\widetilde{x}_3\left(X_1,X_2,X_3\right)\right)}$$

Elle est déterminée quand on connaît les coordonnées des nœuds $X_j^{(i)}$ et les valeurs aux nœuds $u^{(i)}$.

Quand on a choisi l'interpolation géométrique τ, on peut calculer à l'avance la matrice $[Q]$ des coefficients des polynômes de base des interpolations des coordonnées $\widetilde{X}_i$ pour chaque élément de référence. Par contre, le jacobien dépend des coordonnées réelles, et sa non nullité ne peut être vérifiée que quand on connaît les coordonnées réelles des nœuds. On peut toutefois préparer à l'avance la matrice $[Q']$ des coefficients des dérivées des polynômes de base.

4.4.3 En résumé ...

Un élément est caractérisé par :

- la forme de sa maille de référence
- la position des nœuds dans la maille de référence (sommets obligatoires pour la conformité [21])
- l'interpolation de référence $\widetilde{f}_r$ (c'est à dire la matrice $[P]$ des coefficients des polynômes de base de l'interpolation)
- l'interpolation τ des coordonnées des points non nodaux M' (c'est à dire la matrice $[Q]$ des coefficients des polynômes de base de l'interpolation, et la matrice $[Q']$ des coefficients des dérivées de polynômes de base pour le calcul de $[J]$). L'interpolation des coordonnées détermine l'approximation géométrique de l'élément.
- On en déduit une interpolation (en général non polynômiale[22]) $\widetilde{f}$ sur l'élément réel.

4.5 Dérivées et intégrales dans l'élément réel

On verra plus loin que les dérivées et les intégrales dans l'élément réel [23] des fonctions d'interpolation apparaissent dans la discrétisation de la formulation variationnelle. On va montrer ici

20. Sauf dans le cas exceptionnel d'interpolations géométriques linéaires, les fonctions $\widetilde{x}_i(X_1,X_2,X_3)$ (qui représentent τ^{-1}) ne sont pas polynômiales. L'interpolation $\widetilde{f}$ n'est donc pas polynômiale en général. Cependant, elle appartient bien à l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(\Omega)$.
21. mais ce n'est pas suffisant, la conformité doit être vérifiée.
22. sauf si τ est strictement linéaire. Voir note 18
23. En fait les intégrales sont sur l'approximation géométrique de l'élément

que les dérivées de l'interpolation $\widetilde{f}$ dans l'élément réel s'expriment en fonction des dérivées de l'interpolation f_r dans l'élément de référence, et qu'on peut ramener les intégrales sur l'élément réel à des intégrales sur l'élément de référence.

4.5.1 Mailles volumiques

Gradient

Puisque $\widetilde{f}=\widetilde{f}_r\circ\tau^{-1}$, le gradient de l'interpolation $\widetilde{f}$ est :

$$\mathbf{grad}\widetilde{f}=\mathbf{grad}\widetilde{f}_r\,\overline{\otimes}\,(\mathbf{grad}\tau)^{-1}$$

où $\mathbf{grad}\widetilde{f}$ et $\mathbf{grad}\widetilde{f}_r$ sont des tenseurs du premier ordre et $\mathbf{grad}\tau$ un tenseur du second ordre [24].

En termes de composantes dans un système de coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{grad}\widetilde{f}\right)_i &= \left(\mathbf{grad}\widetilde{f}_r\right)_k\left(\mathbf{grad}\tau^{-1}\right)_{ki}\\ \frac{\partial\widetilde{f}}{\partial X_i} &= \frac{\partial\widetilde{f}_r}{\partial x_k}\left([J]^{-1}\right)_{ki}\end{aligned}$$

avec sommation sur l'indice k, et où on a posé

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial\widetilde{X}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\widetilde{X}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\widetilde{X}_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial\widetilde{X}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\widetilde{X}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\widetilde{X}_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial\widetilde{X}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial\widetilde{X}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial\widetilde{X}_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial X_1} & \frac{\partial\widetilde{f}}{\partial X_2} & \frac{\partial\widetilde{f}}{\partial X_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\widetilde{f}_r}{\partial x_1} & \frac{\partial\widetilde{f}_r}{\partial x_2} & \frac{\partial\widetilde{f}_r}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial\widetilde{X}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\widetilde{X}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\widetilde{X}_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial\widetilde{X}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\widetilde{X}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\widetilde{X}_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial\widetilde{X}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial\widetilde{X}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial\widetilde{X}_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}^{-1}$$

Le calcul des dérivées de $\widetilde{f}$ nécessite donc l'inversion de $[J]$ pour chaque point de élément réel.

Second gradient

Le second gradient de l'interpolation $\widetilde{f}$ est :

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\,\mathbf{grad}\widetilde{f} &= \mathbf{grad}\left(\mathbf{grad}\widetilde{f}_r\,\overline{\otimes}\,(\mathbf{grad}\tau)^{-1}\right)\\ &= (\mathbf{grad}\tau)^{-T}\,\overline{\otimes}\,\mathbf{grad}\,\mathbf{grad}\widetilde{f}_r+\mathbf{grad}\widetilde{f}_r\,\overline{\otimes}\,\mathbf{grad}\left((\mathbf{grad}\tau)^{-1}\right)\end{aligned}$$

En termes de composantes dans un système de coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial X_i\,\partial X_j}=\left(J^{-1}\right)_{ki}\frac{\partial^2\widetilde{f}_r}{\partial x_k\,\partial x_j}+\frac{\partial\widetilde{f}_r}{\partial x_k}\frac{\partial\left(J^{-1}\right)_{ki}}{\partial X_j}}$$

avec sommation sur l'indice k.

Les dérivées secondes de $\widetilde{f}_r$ peuvent être préparées d'avance en rangeant dans une matrice $[P'']$ les coefficients des dérivées secondes des polynômes de base de l'interpolation $\widetilde{f}_r$. La matrice $[J]$ est calculée avec la matrice $[Q']$, mais son inversion doit être faite pour chaque élément réel car elle dépend des coordonnées réelles des nœuds.

24. Bien noter que $\mathbf{grad}\left(\tau^{-1}\right)=\left(\mathbf{grad}\tau\right)^{-1}$. Il n'est donc pas nécessaire de calculer explicitement les fonctions $\widetilde{x}_i\left(M_j\right)$ pour calculer la matrice jacobienne de la transformation inverse.

Intégrales

Si on note $\mathcal{V}'$ l'approximation géométrique de l'élément réel et si on note $\mathcal{V}_r$ l'élément de référence, l'élément de volume de l'approximation géométrique de l'élément réel est :

$$dv = \det[J]\ dx_1 dx_2 dx_3$$

Une intégrale sur l'élément réel se ramène à une intégrale sur l'élement de référence par changement de variables :

$$\int_{\mathcal{V}'} G(X_1, X_2, X_3) dv = \int_{\mathcal{V}_r} G(\widetilde{X}_1(x_1, x_2, x_3), \widetilde{X}_2(x_1, x_2, x_3), \widetilde{X}_3(x_1, x_2, x_3)) \det[J]\ dx_1 dx_2 dx_3$$

où $\det[J]$ est une fonction (en général non polynômiale [25]) de $x_1, x_2, x3$.

4.5.2 Mailles surfaciques

L'espace de référence est de dimension 2, On note $\mathcal{S}'$ l'approximation géométrique engendrée par la transformation τ. La surface $\mathcal{S}'$ est une variété de dimension 2 plongée dans l'espace physique de dimension 3. L'interpolation $\widetilde{f}$ n'est définie que sur $\mathcal{S}'$, ses dérivées par rapport aux 3 coordonnées X'_i de M' n'ont aucun sens. Les dérivées et les intégrales sur les surfaces demandent un travail de préparation.

La surface $\mathcal{S}'$ de point courant $M' = \tau(m)$ est naturellement paramétrée par x_1 et x_2:

$$X'_1 = \widetilde{X}_1(x_1, x_2) \ \ ; \ \ X'_2 = \widetilde{X}_3(x_1, x_2) \ \ ; \ \ X'_3 = \widetilde{X}_3(x_1, x_2)$$

Les trois fonctions d'interpolation $\widetilde{X}_i$ sont la définition paramétrique de $\mathcal{S}'$.

La base naturelle tangente de $\mathcal{S}'$ pour ces paramètres est :

$$\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \frac{\partial M'}{\partial x_1} \ \ , \ \ \boldsymbol{e}_2 = \frac{\partial M'}{\partial x_2} \right\}$$

En général, cette base naturelle n'est ni orthogonale ni normée. Le plan Π défini par $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$ est le plan tangent à $\mathcal{S}'$ en M'.

Les composantes de la base naturelle de $\mathcal{S}'$ dans une base globale $\{\boldsymbol{E}_k\}$ orthonormée sont :

$$[\boldsymbol{e}_1]_E = \begin{bmatrix} \frac{\partial \widetilde{X}_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \widetilde{X}_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \widetilde{X}_3}{\partial x_1} \end{bmatrix} \ \ ; \ \ [\boldsymbol{e}_2]_E = \begin{bmatrix} \frac{\partial \widetilde{X}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \widetilde{X}_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \widetilde{X}_3}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Une partie du travail peut être préparé à l'avance : la matrice $[Q']$ des dérivées des polynômes de base des $\widetilde{X}_i$. Mais les vecteurs de la base naturelle sont fonction des coordonnées réelles et doivent être calculées pour chaque élément réel.

On aura aussi besoin de la matrice 2×2 symétrique

$$[a_{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}$$

et de son inverse

$$[a^{\bullet\bullet}] = [a_{\bullet\bullet}]^{-1}$$

25. voir note 18 page 34.

Gradient de surface

Les composantes covariantes du gradient de surface de $\widetilde{f}$ dans la base naturelle sont (voir sectionB.3 page 75) :

$$\left(\widetilde{\mathbf{grad}}\widetilde{f}\right)_\alpha = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_\alpha}$$

Puisque $\widetilde{f}(M) = \widetilde{f}_r(m) = \widetilde{f}(x_1, x_2)$ le gradient de $\widetilde{f}$ est encore :

$$\left(\widetilde{\mathbf{grad}}\widetilde{f}\right)_\alpha = \frac{\partial \widetilde{f}_r}{\partial x_\alpha}$$

Par changement de base (voir section B.2 page 75), on obtient les composantes de ce vecteur dans la base cartésienne orthonormée $\{\boldsymbol{E}_k\}$:

$$\left[\widetilde{\mathbf{grad}}\widetilde{f}\right]_E = \left[\ [\boldsymbol{e}_1]_E \quad [\boldsymbol{e}_2]_E\ \right] [a^{\bullet\bullet}] \left[\ \frac{\partial \widetilde{f}_r}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \widetilde{f}_r}{\partial x_2}\ \right]$$

La dérivée dans une direction unitaire *tangente* $\boldsymbol{u}$ est donnée par :

$$D_{\boldsymbol{u}}\widetilde{f} = \widetilde{\mathbf{grad}}\widetilde{f} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{u} = \left[\widetilde{\mathbf{grad}}\widetilde{f}\right]_E^T [\boldsymbol{u}]_E$$

Second gradient

Les composantes deux fois covariantes du second gradient surfacique de $\widetilde{F}$ dans la base naturelle sont rangées dans la matrice symétrique 2×2 (voir section B.3 page 75) :

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{\mathbf{grad}}\,\widetilde{\mathbf{grad}}\widetilde{f}\right)_{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_\gamma}\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial^2 \widetilde{f}_r}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial \widetilde{f}_r}{\partial x_\gamma}\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

où

$$\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} a^{\gamma\mu}\left(\frac{\partial a_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial a_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right)$$

Pour chaque élément, il faut donc calculer les 8 $\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$. En fait on n'en calcule que 6 car $\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \overline{\Gamma}^\gamma_{\beta\alpha}$

Remarque : Dans le cas d'éléments triangulaires à trois nœuds avec interpolation linéaire des coordonnées, la surface $\mathcal{S}'$ est un plan et les tous $\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$ sont tous nuls. Dans tous les autres cas, ils ne sont pas tous nuls[26].

Les composantes de $\widetilde{\mathbf{grad}}\,\widetilde{\mathbf{grad}}\widetilde{f}$ dans la base $\{\boldsymbol{E}_k\}$ se rangent dans la matrice 3×3 symétrique[27] (voir section B.2 page 75) :

$$\left[\widetilde{\mathbf{grad}}\,\widetilde{\mathbf{grad}}\widetilde{f}\right]_E = \left[\ [\boldsymbol{e}_1]_E \quad [\boldsymbol{e}_2]_E\ \right] [a^{\bullet\bullet}] \left[\frac{\partial^2 \widetilde{f}_r}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial \widetilde{f}_r}{\partial x_\gamma}\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\right] [a^{\bullet\bullet}] \begin{bmatrix} [\boldsymbol{e}_1]_E^T \\ [\boldsymbol{e}_2]_E^T \end{bmatrix}$$

26. Dans beaucoup de logiciels (pour ne pas dire dans tous !), les approximations géométriques $\mathcal{S}'$ des mailles réelles sont considérées comme quasi planes, même quand l'interpolation des coordonnées n'est pas linéaire. Cette hypothèse simplificatrice permet d'éviter le calcul des $\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$, mais elle peut amener des erreurs importantes sur la valeur des dérivées secondes si $\mathcal{S}'$ est très éloignée d'un plan.

27. on ne calcule donc que 6 termes.

Si on se donne deux directions *tangentes* unitaires $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, la dérivée seconde dans les directions $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ est :

$$D_{\boldsymbol{uv}}\widetilde{f} = \boldsymbol{u} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \widetilde{\mathbf{grad}}\,\widetilde{\mathbf{grad}}\widetilde{f} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{v}$$

Si on calcule cette dérivée avec les composantes dans $\{\boldsymbol{E}_k\}$:

$$D_{\boldsymbol{uv}}\widetilde{f} = [\boldsymbol{u}]_E^T \left[\widetilde{\mathbf{grad}}\,\widetilde{\mathbf{grad}}\widetilde{f}\right]_E [\boldsymbol{u}]_E$$

Intégrales

On montre en analyse des surfaces que l'élément de surface de $\mathcal{S}'$ est :

$$ds' = (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{n} \; dx_1 dx_2$$

On pose $K(m) = (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{n}$. Cette quantité doit être évaluée pour chaque élément réel.

On a donc :

$$\int_{\mathcal{S}'} G(M') \; ds' = \int_{\mathcal{S}_r} G\left(\tau(m)\right) \; K(m) \; dx_1 dx_2$$

4.5.3 Mailles linéiques

L'espace de référence est de dimension 1. On note $\mathcal{C}'$ l'approximation géométrique de la courbe réelle $\mathcal{C}$ engendrée par la transformation τ. L'interpolation $\widetilde{f}$ n'est définie que sur $\mathcal{C}'$ et les dérivées de $\widetilde{f}$ par rapport aux 3 coordonnées X_i' de M n'ont aucun sens.

La courbe $\mathcal{C}'$ est naturellement paramétrée par x_1 :

$$X_1' = \widetilde{X}_1(x_1) \;\; ; \;\; X_2' = \widetilde{X}_2(x_1) \;\; ; \;\; X_3' = \widetilde{X}_3(x_1)$$

Les trois fonctions d'interpolation $\widetilde{X}_i$ sont la définition paramétrique de $\mathcal{C}'$.

La base naturelle tangente de $\mathcal{C}'$ est le vecteur tangent *non unitaire*

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{dM'}{dx_1} = \frac{d\widetilde{X}_1}{dx_1}\boldsymbol{E}_1 + \frac{d\widetilde{X}_2}{dx_1}\boldsymbol{E}_2 + \frac{d\widetilde{X}_3}{dx_1}\boldsymbol{E}_3$$

Gradient

Le gradient linéique est

$$\widetilde{\mathbf{grad}}\widetilde{f} = \frac{d\widetilde{F}}{dx_1}\,\boldsymbol{e}^1 = \frac{d\widetilde{f}_r}{dx_1}\,\boldsymbol{e}^1$$

La direction de dérivation unitaire $\boldsymbol{u}$ est :

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{e}_1}{||\boldsymbol{e}_1||} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\widetilde{X}_1}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\widetilde{X}_2}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\widetilde{X}_3}{dx_1}\right)^2}}\,\boldsymbol{e}_1$$

La dérivée le long de l'approximation géométrique de la courbe (c'est à dire la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne) est donc :

$$\boxed{\frac{d\widetilde{f}}{dl} = D_{\boldsymbol{u}}\widetilde{f} = \widetilde{\mathbf{grad}}\widetilde{f} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{u} = \frac{\frac{d\widetilde{f}_r}{dx_1}}{\sqrt{\left(\frac{d\widetilde{X}_1}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\widetilde{X}_2}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\widetilde{X}_3}{dx_1}\right)^2}}}$$

second gradient

On déduit de ce qui précède :

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\widetilde{F}}{dl^2} &= \frac{d}{dl}\left(\frac{\frac{d\widetilde{F}}{dx_1}}{\sqrt{\left(\frac{d\widetilde{X}_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{d\widetilde{X}_2}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{d\widetilde{X}_3}{dx_1}\right)^2}}\right)\\
&= \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\frac{d\widetilde{f}_r}{dx_1}}{\sqrt{\left(\frac{d\widetilde{X}_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{d\widetilde{X}_2}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{d\widetilde{X}_3}{dx_1}\right)^2}}\right)\frac{dx_1}{dl}\\
&= \left(\frac{\frac{d^2\widetilde{f}_r}{dx_1^2}}{\sqrt{\left(\frac{d\widetilde{X}_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{d\widetilde{X}_2}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{d\widetilde{X}_3}{dx_1}\right)^2}}-\frac{d\widetilde{f}_r}{dx_1}\frac{\frac{d\widetilde{X}_1}{dx_1}\frac{d^2\widetilde{X}_1}{dx_1^2}+\frac{d\widetilde{X}_2}{dx_1}\frac{d^2\widetilde{X}_2}{dx_1^2}+\frac{d\widetilde{X}_3}{dx_1}\frac{d^2\widetilde{X}_3}{dx_1^2}}{\left(\left(\frac{d\widetilde{X}_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{d\widetilde{X}_2}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{d\widetilde{X}_3}{dx_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{dx_1}{dl}\\
&= \frac{\frac{d^2\widetilde{f}_r}{dx_1^2}}{\left(\frac{d\widetilde{X}_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{d\widetilde{X}_2}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{d\widetilde{X}_3}{dx_1}\right)^2}-\frac{d\widetilde{f}_r}{dx_1}\frac{\frac{d\widetilde{X}_1}{dx_1}\frac{d^2\widetilde{X}_1}{dx_1^2}+\frac{d\widetilde{X}_2}{dx_1}\frac{d^2\widetilde{X}_2}{dx_1^2}+\frac{d\widetilde{X}_3}{dx_1}\frac{d^2\widetilde{X}_3}{dx_1^2}}{\left(\left(\frac{d\widetilde{X}_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{d\widetilde{X}_2}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{d\widetilde{X}_3}{dx_1}\right)^2\right)^{2}}
\end{aligned}
$$

Remarque : Si l'interpolation des coordonnées est linéaire (l'approximation géométrique de la maille est une ligne brisée), alors les dérivées secondes $\frac{d^2\widetilde{X}_i}{dx_1^2}$ sont nulles.

Intégrales

L'élément de longueur est

$$dl = \sqrt{\left(\frac{\partial\widetilde{X}_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\widetilde{X}_2}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\widetilde{X}_3}{dx_1}\right)^2}\,dx_1$$

On a donc :

$$\int_{l_1}^{l_2} G(l)\,dl = \int_{-1}^{1} G\left(l(x_1)\right)\sqrt{\left(\frac{\partial\widetilde{X}_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\widetilde{X}_2}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\widetilde{X}_3}{dx_1}\right)^2}\,dx_1$$

4.5.4 Remarque

On voit parfois proposer des éléments de référence avec des continuités supérieures à C_0. Les fomules précédents donnant les gradients des interpolations réelles en fonction des gradients de l'interpolation de référence montrent que si les gradients sur l'élément réel sont continus, ils ne le sont plus sur l'interpolation de référence (et inversement) car le jacobien de la transformation géométrique change d'un élément à l'autre. La continuité C_1 n'est donc qu'approximative sur l'élément réel.

4.6 Conclusion

Dans les logiciels, on dispose d'une bibliothèque d'éléments prédéterminés[28]. Les polynômes de base des interpolations de référence sont calculés à l'avance et préprogrammés. L'utilisateur ordinaire n'a donc plus à s'en préoccuper. L'objectif de ce chapitre n'était que de faire comprendre comment on les construit, et surtout de permettre à l'utilisateur d'un logiciel de les choisir en connaissance de cause.

Il suffit de retenir que choisir un élément dans une bibliothèque c'est à la fois :

- Choisir une forme de maille
- Choisir la place des nœuds dans la maille
- Choisir une interpolation sur l'élément de référence
- Choisir une approximation géométrique de la forme de l'élément réel

Les fonctions d'interpolation sur l'approximation géométrique, leurs dérivées, et leurs intégrales sur l'approximation géométrique sont alors déterminées par les valeurs aux nœuds.

Le choix des éléments est délicat : c'est un compromis entre la qualité de la solution approchée et le coût du calcul.

L'exemple traité dans la section 2.2 page 9 montre clairement que la qualité de la solution approchée augmente avec le degré des polynômes d'interpolation : Il est plus facile d'approcher une courbe avec des polynômes de degré 2 qu'avec des segments de droite ; et plus le nombre de mailles est grand, plus la courbe est facile à approcher.

Par contre, le nombre de nœuds (et donc le nombre d'inconnues[29]) augmente avec le degré d'interpolation et le nombre de mailles. La taille du système d'équations à résoudre (et donc le temps de résolution) peut devenir très grande. Pour fixer les idées, on peut retenir que pour un algorithme de résolution par une méthode directe[30], le temps de résolution est proportionnel au cube du nombre d'inconnues.

Sans qu'on puisse le chiffrer exactement, on peut dire que les éléments de faible degré d'interpolation demandent un maillage plus fin que les éléments de degré plus élevé pour obtenir une «précision équivalente». Il faut donc se préoccuper de cette question dès la phase de maillage, et l'examen d'une solution approchée peut parfois amener à recommencer un calcul avec un maillage et/ou des interpolations différents.

Une fois qu'on a choisi un maillage et des éléments conformes, on a construit un espace $\mathcal{F}$ de fonctions $F(M)$ définies sur tout le domaine Ω, continue C_0, obtenue par juxtaposition des interpolations sur les éléments réels[31] , à valeurs réelles et de carré intégrable[32]. Cet espace est donc inclus dans l'espace fonctionnel de Sobolev $\mathcal{H}^1(\Omega)$.
S'il y a n_{ddl} inconnues par nœud, on a construit un espace de fonctions inclus dans $\mathcal{H}^1(\Omega)^{n_{ddl}}$. Cette propriété est essentielle dans les théorèmes de convergence de la méthode des éléments finis.

Chaque fonction F de $\mathcal{F}$ est *une interpolation sur tout le domaine* Ω, complètement déterminée par les $N_{ddl} = N \times n_{ddl}$ valeurs de ddl aux nœuds. On peut donc écrire :

$$F(M) = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} u^{(i)}\, F^{(i)}(M) \tag{4.8}$$

où $u^{(i)}$ est la valeur au ddl numéro i ($i \in [1, 2, \ldots, N_{ddl}]$).

28. et on a parfois la possibilité d'en définir soi même.
29. le nombre d'inconnues est égal au nombre de nœuds multiplié par le nombre d'inconnues par nœud.
30. Pour les systèmes de grande taille, on préfère les méthodes itératives qui sont plus économiques dans ce cas.
31. ou plutôt, sur leur approximation géométrique.
32. Sous réserve que le jacobien de la transformation τ ne s'annule pas en un point.

Les fonctions $F^{(i)}(M)$ sont les *fonctions de base*[33] *de l'espace* $\mathcal{F}$. Ce sont les N_{ddl} fonctions $F^{(i)}(M)$ obtenues pour les N_{ddl}-uplets de valeurs $\{u^{(1)} = \delta_{i1}, u^{(2)} = \delta_{i2}, \ldots, u^{(j)} = \delta_{ij}, \ldots, u^{(N_{ddl})} = \delta_{iN_{ddl}}\}$.

Les fonctions de base $F^{(i)}(M)$ sont donc nulles partout sauf dans les éléments qui contiennent le nœud i. On a en particulier :

$$F^{(i)}(M^{(j)}) = \delta_{ij}$$

Remarque :
La quasi totalité des logiciels d'éléments finis utilise des éléments de référence pour construire les interpolations sur l'approximation de l'élément réel. Ce choix a des avantages informatiques évidents puisque les résultats d'une partie des calculs de l'interpolation sur l'élément réel peuvent être faits *a priori* et sont codés dans le programme.

Cependant, on a vu que cette méthode présente quelques inconvénients :

- la géométrie des mailles réelles est approximée
- l'interpolation sur l'élément réel n'est pas polynômiale en général[34], ce qui complique les calculs de dérivées et d'intégrales sur l'élément réel[35].
- la vérification de l'inversibilité en tout point de la transformation τ entre l'élément de référence et l'élément réel est difficile et bien souvent ignorée.

On pourrait construire directement des interpolations polynômiales conformes[36] sur l'élément réel, ce qui éliminerait les inconvénients précédents. Ce serait au prix d'une plus grande utilisation de la mémoire[37], et le temps de préparation (prétraitement) est augmenté[38]. On est en droit de se demander, compte tenu du matériel actuel, si les contraintes informatiques qui justifiaient l'utilisation d'éléments de référence sont encore justifiées aujourd'hui...

33. en général non polynômiales, voir note 18 page 34.
34. sauf pour les mailles linéiques à deux nœuds, les mailles surfaciques triangulaires à trois nœuds et les mailles volumiques tétrahédriques à quatre nœuds.
35. Voir section 4.5 page 35 et suivantes. On verra plus loin que pour calculer les intégrales sur les éléments réels, on utilise des méthodes approchées, le plus souvent la méthode des points de Gauss. Ces intégrales pourraient être calculées exactement si les interpolations sur l'élément réel étaient polynômiales.
36. comme on le fait habituellement sur l'élément de référence
37. La description de chaque élément doit contenir, en plus de sa géométrie, la description de ses propres fonctions de forme
38. Le mailleur doit non seulement définir la géométrie des éléments, mais aussi déterminer les fonctions de forme de chaque élément

Chapitre 5

Les formulations variationnelles

Pour résoudre un système différentiel [1], modélisant un système physique, il faut le mettre sous une *forme intégrale*, appelée aussi *forme variationnelle* ou encore *forme faible*. Ces formulations peuvent être déduites du système différentiel par des raisonnements mathématiques ou par des raisonnements physiques. On traitera à titre d'illustration des exemples en fin de chapitre.

Pour être suffisamment général, on utilise les notations suivantes :

- On note $\boldsymbol{u}(M)$ le champ inconnu [2].
- On symbolise le système différentiel par un opérateur diffférentiel $\mathcal{D}$ devant être nul en tout point d'un domaine Ω.
- On symbolise les conditions aux limites sur le bord par un opérateur $\mathcal{C}$ devant être nul [3] sur la frontière $\partial\Omega$.

Par exemple, dans la section 2.2 page 9, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D} & : & f(x) \longrightarrow \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2\,\dfrac{df(x)}{dx} - 3\,x \\ \mathcal{C} & : & f(x) \longrightarrow \begin{bmatrix} f(0) \\ \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=1} \end{bmatrix} \end{array}$$

On verra d'autres exemples en fin de chapitre.

Tout problème peut donc s'énoncer ainsi :

Trouver le champ $\boldsymbol{u}(M)$ défini sur Ω tel que

- $\mathcal{D}(\boldsymbol{u}(M)) = 0 \;\; \forall M \in \Omega$
- $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}(N)) = 0 \;\; \forall N \in \partial\Omega$

5.1 Rappel de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

Dans des espaces fonctionnels de fonctions définies sur un domaine Ω, avec des conditions sur les fonctions de cet espace et des conditions sur Ω qu'on supposera satisfaites, on peut définir un

1. aux dérivées partielles si Ω est une surface ou un volume.
2. Ici $\boldsymbol{u}$ est noté en caractères gras par souci de généralité. Le champ inconnu peut être scalaire vectoriel ou tensoriel.
3. l'opérateur $\mathcal{C}$ peut être différentiel ou non, selon que les conditions aux limites portent sur les dérivées de $\boldsymbol{u}$ ou non.

produit scalaire entre deux *fonctions* $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$:

$$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >= \int_\Omega \boldsymbol{f}(M) \bullet \boldsymbol{g}(M)\ d\Omega$$

où

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}(M) \bullet \boldsymbol{g}(M) = f(M)\, g(M) \ \text{ si } f \text{ et } g \text{ sont à valeurs scalaires}\\
&\boldsymbol{f}(M) \bullet \boldsymbol{g}(M) = \boldsymbol{f}(M) \overline{\otimes} \boldsymbol{g}(M) \ \text{ si } f \text{ et } g \text{ sont à valeurs vectorielles}\\
&\boldsymbol{f}(M) \bullet \boldsymbol{g}(M) = \boldsymbol{f}(M) \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{g}(M) \ \text{ si } f \text{ et } g \text{ sont à valeurs tensorielles du second ordre}
\end{aligned}$$

D'autre part, un produit scalaire a la propriété suivante :

$$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} > = 0\ \forall \boldsymbol{g} \iff \boldsymbol{f} = 0$$

En utilisant cette propriété, il vient :

$$\boxed{\int_\Omega \boldsymbol{f}(M) \bullet \boldsymbol{g}(M)\ d\Omega = 0\ \forall \boldsymbol{g}(M) \iff \boldsymbol{f}(M) = 0} \tag{5.1}$$

5.2 Formes variationnelles

En utilisant (5.1), une nouvelle formulation du problème est donc :

– Trouver le champ $\boldsymbol{u}$ tel que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\psi}(M) \cdot \mathcal{D}(\boldsymbol{u}(M)) = 0\ \ \forall \boldsymbol{\psi}(M)$$

– avec $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}(N)) = 0\ \ \forall N \in \partial\Omega$

Cette formulation est une formulation variationnelle «équivalente»[4] au système différentiel initial.

On obtient d'autres formulations variationnelles en tranformant les intégrales. En effet, l'opérateur $\mathcal{D}$ fait intervenir des opérateurs tels que gradient, divergence, rotationnel, laplacien, et on donne dans la section suivante des formules pour transformer les intégrales.

Ces transformations d'intégrales font apparaître des intégrales *sur les frontières de* Ω, qu'on appelle *intégrales de bord*, dans lesquelles on peut tenir compte de tout ou partie des conditions aux limites : le nombre de conditions aux limites diminue.

D'autre part, après chaque transformation d'intégrale, l'inconnue $\boldsymbol{u}$ apparaît avec un ordre de dérivation diminué de 1. L'intérêt de cette particularité apparaîtra plus loin.

Finalement, après d'éventuelles transformations d'intégrales, le problème peut se mettre sous la forme variationnelle générale suivante :

– Trouver le champ $\boldsymbol{u}$ tel que

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\psi}(M), \boldsymbol{u}(M)) = \mathcal{B}(\boldsymbol{\psi}(M))\ \ \forall \boldsymbol{\psi}(M) \tag{5.2}$$

– avec $\mathcal{C}'(\boldsymbol{u}(N)) = 0\ \ \forall N \in \partial\Omega$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des opérateurs produisant des intégrales sur Ω et sur $\partial\Omega$ portant sur $\boldsymbol{\psi}(M)$ et $\boldsymbol{u}(M)$ et leurs dérivées, et où $\mathcal{C}'$ est un opérateur produisant les conditions aux limites restantes.

4. dans un certain sens précisé en analyse fonctionnelle : la fonction $\mathcal{D}(\boldsymbol{u}(M))$ et les fonctions $\boldsymbol{\psi}$ doivent appartenir à certains espaces fonctionnels, éventuellement différents. En fait, si $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{F}$, alors $\mathcal{D}(\boldsymbol{u}(M)) \in \mathcal{F}'$ où $\mathcal{F}'$ est l'espace dual de $\mathcal{F}$. Si les fonctions $\boldsymbol{\psi}$ de $\mathcal{F}$ sont très régulières, alors les fonctions de $\mathcal{F}'$ le sont peu, et inversement. On montre en analyse fonctionnelle que si $\mathcal{F}$ est l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω, alors $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

5.3 Transformations d'intégrales

La validité des formules qui suivent est soumise à des conditions de régularité des champs (scalaires, vectoriels ou tensoriels) définis sur Ω que nous supposerons satisfaites.

5.3.1 Transformations d'intégrales sur un volume

On note $\mathcal{V}$ le volume , $\mathcal{S}$ la frontière du volume, et $\boldsymbol{n}$ la normale unitaire extérieureà $\mathcal{S}$.

Dans les formules qui suivent :

- g est un champ scalaire quelconque défini sur $\mathcal{V}$,
- $\boldsymbol{V}$ est un champ vectoriel quelconque défini sur $\mathcal{V}$,
- $\boldsymbol{T}$ est un champ tensoriel du second ordre quelconque défini sur $\mathcal{V}$,
- $\boldsymbol{S}$ est un champ tensoriel du troisième ordre quelconque défini sur $\mathcal{V}$.

La démonstration de ces formules est en annexe A page 71.

si u est un champ scalaire : $\mathbf{grad}u$ est un vecteur, Δu est un scalaire.

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{V} \overline{\otimes}\, \mathbf{grad}\, u\; dv = -\int_{\mathcal{V}} u \operatorname{div} \boldsymbol{V}\; dv + \int_{\mathcal{S}} u\, \boldsymbol{V} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}\; ds \tag{5.3}$$

$$\int_{\mathcal{V}} g\, \Delta\, u\; dv = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\, g \overline{\otimes}\, \mathbf{grad}\, u\; dv + \int_{\mathcal{S}} g\, \mathbf{grad}\, u \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}\; ds \tag{5.4}$$

si $\boldsymbol{u}$ est un champ vectoriel : $\mathbf{grad}\boldsymbol{u}$ est un tenseur du second ordre, $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ est un scalaire, $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}$ est un vecteur, $\boldsymbol{\Delta u}$ est un vecteur.

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}}\, \mathbf{grad}\, \boldsymbol{u}\; dv = -\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{u} \overline{\otimes}\, \mathbf{div}\, \boldsymbol{T}\; dv + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{u} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{T} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}\; ds \tag{5.5}$$

$$\int_{\mathcal{V}} g\, \mathbf{div}\, \boldsymbol{u}\; dv = -\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{u} \overline{\otimes}\, \mathbf{grad}\, g\; dv + \int_{\mathcal{S}} g\, \boldsymbol{u} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}\; ds \tag{5.6}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{V} \overline{\otimes}\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}\; dv = +\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{u} \overline{\otimes}\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{V}\; dv - \int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{u}) \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}\; ds \tag{5.7}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{V} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{\Delta}\, \boldsymbol{u}\; dv = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\, \boldsymbol{V} \overline{\overline{\otimes}}\, \mathbf{grad}\, \boldsymbol{u}\; dv + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{V} \overline{\otimes}\, \mathbf{grad}\, \boldsymbol{u} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}\; ds \tag{5.8}$$

si $\boldsymbol{u}$ est un champ tensoriel du second ordre : $\mathbf{grad}\boldsymbol{u}$ est un tenseur du troisième ordre, $\mathbf{div}\, \boldsymbol{u}$ est un vecteur, $\boldsymbol{\Delta u}$ est un tenseur du second ordre.

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{S} \overline{\overline{\overline{\otimes}}}\, \mathbf{grad}\, \boldsymbol{u}\; dv = -\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{u} \overline{\overline{\otimes}}\, \mathbf{div}\, \boldsymbol{S}\; dv + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{u} \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{S} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}\; ds \tag{5.9}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{V} \overline{\otimes} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\; dv = -\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{u} \overline{\overline{\otimes}}\, \mathbf{grad}\, \boldsymbol{V}\; dv + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{V} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{u} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}\; ds \tag{5.10}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{\Delta}\, \boldsymbol{u}\; dv = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\, \boldsymbol{T} \overline{\overline{\overline{\otimes}}}\, \mathbf{grad}\, \boldsymbol{u}\; dv + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}}\, \mathbf{grad}\, \boldsymbol{u} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}\; ds \tag{5.11}$$

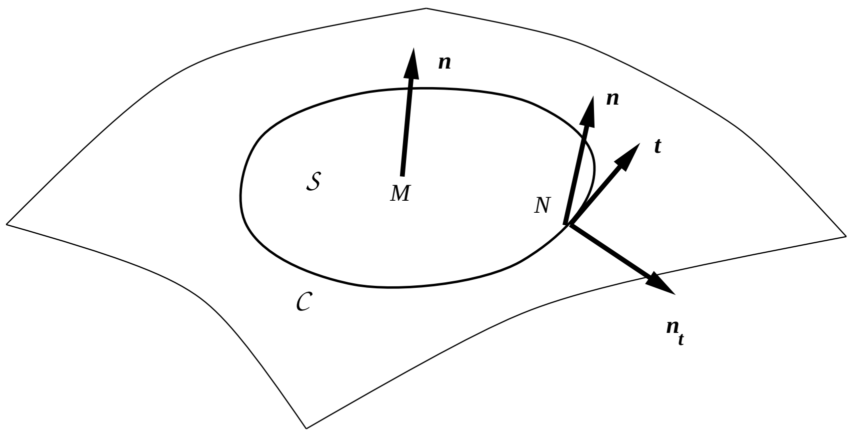

FIG. 5.1 – *Domaine surfacique*

5.3.2 Transformations d'intégrales sur une surface

On note $\mathcal{S}$ la surface , $\mathcal{C}$ la courbe frontière de la surface, $\boldsymbol{n}$ la normale unitaire à $\mathcal{S}$ et $\boldsymbol{n}_t$ la normale extérieure a la courbe $\mathcal{C}$ et tangente à $\mathcal{S}$. (voir figure 5.1).

Dans les formules qui suivent :

- g est un champ scalaire défini sur $\mathcal{S}$,
- $\boldsymbol{V}$ est un champ vectoriel *tridimensionnel* défini sur $\mathcal{S}$,
- $\overline{\boldsymbol{V}}$ est la partie tangente de $\boldsymbol{V}$,
- $\boldsymbol{T}$ est un champ tensoriel du second ordre *tridimensionnel* défini sur $\mathcal{S}$,
- $\overline{\boldsymbol{T}}$ est la partie tangente de $\boldsymbol{T}$
- $\boldsymbol{S}$ est un champ tensoriel du troisième ordre *tridimensionnel* défini sur $\mathcal{S}$,
- $\overline{\boldsymbol{S}}$ est la partie tangente de $\boldsymbol{S}$

Les opérateurs différentiels de surface $\widetilde{\mathbf{grad}}$, $\widetilde{\mathrm{div}}$, $\widetilde{\mathbf{div}}$, $\widetilde{\mathbf{rot}}$, $\widetilde{\Delta}$ et $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}$ sont définis en annexe B page 73. La démonstration des formules qui suivent est en section B.5 page 78.

si u est un champ scalaire : $\widetilde{\mathbf{grad}}\, u$ est un vecteur tangent, $\widetilde{\Delta} u$ est un scalaire.

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{V} \cdot \widetilde{\mathbf{grad}}\, u \; ds = -\int_{\mathcal{S}} u \,\widetilde{\mathrm{div}}\, \overline{\boldsymbol{V}} \; ds + \int_{\mathcal{S}} u\, \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_t \; dl \tag{5.12}$$

$$\int_{\mathcal{S}} g \,\widetilde{\Delta} u \; ds = -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}}\, g \,\overline{\otimes}\, \widetilde{\mathbf{grad}}\, u \; ds + \int_{\mathcal{C}} u \,\widetilde{\mathbf{grad}}\, g \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t \; dl \tag{5.13}$$

si u est un champ vectoriel tangent : $\widetilde{\mathbf{grad}}\, \boldsymbol{u}$ est un tenseur tangent du second ordre, $\widetilde{\mathrm{div}}\, \boldsymbol{u}$ est un scalaire, $\widetilde{\Delta}\, \boldsymbol{u}$ est un vecteur tangent.

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{T} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \widetilde{\mathbf{grad}}\, \boldsymbol{u} \; ds = -\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{u} \,\overline{\otimes}\, \widetilde{\mathbf{div}}\, \overline{\boldsymbol{T}} \; ds + \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{u} \,\overline{\otimes}\, \overline{\boldsymbol{T}} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t \; dl \tag{5.14}$$

$$\int_{\mathcal{S}} g \,\widetilde{\mathrm{div}}\, \boldsymbol{u} \; ds = -\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{u} \,\overline{\otimes}\, \widetilde{\mathbf{grad}}\, g \; ds + \int_{\mathcal{C}} g\, \boldsymbol{u} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t \; dl \tag{5.15}$$

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{V} \cdot \widetilde{\Delta}\, \boldsymbol{u} \; ds = -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}}\, \overline{\boldsymbol{V}} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \widetilde{\mathbf{grad}}\, \boldsymbol{u} \; ds + \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{V} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{grad}}\, \boldsymbol{u} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t \right) \; dl \tag{5.16}$$

si u est un champ tensoriel tangent du second ordre : $\widetilde{\mathbf{grad}}\,\boldsymbol{u}$ est un tenseur tangent du troisième ordre, $\widetilde{\mathbf{div}}\,\boldsymbol{u}$ est un vecteur tangent, $\widetilde{\Delta}\,\boldsymbol{u}$ est un tenseur tangent du second ordre.

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{V} \cdot \widetilde{\mathbf{div}}\,\boldsymbol{u}\; ds = -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}}\,\boldsymbol{V} \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{u}\; ds + \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{V} \cdot (\boldsymbol{u} \overline{\otimes} \boldsymbol{n}_t)\; dl \tag{5.17}$$

5.3.3 Transformations d'intégrales sur une courbe

On note $\mathcal{C}$ la courbe , A et B sont les points frontière de la courbe. Dans les formules qui suivent :

- g est un champ scalaire défini sur $\mathcal{C}$,
- $\boldsymbol{V}$ est un champ vectoriel *tridimensionnel* défini sur $\mathcal{C}$.

si u est un champ scalaire :

$$\int_{\mathcal{C}} g\,\frac{du}{dl}\; dl = -\int_{\mathcal{C}} u\,\frac{dg}{dl} + [u\,g]_A^B \tag{5.18}$$

(C'est la formule classique d'intégration par parties.)

si $\boldsymbol{u}$ est un champ vectoriel tridimensionnel :

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{V} \cdot \frac{\boldsymbol{du}}{dl}\; dl = -\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{u} \cdot \frac{\boldsymbol{dV}}{dl}\; dl + [\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{u}]_A^B \tag{5.19}$$

5.4 Exemple 1 : Le problème thermique stationnaire

On suppose que le domaine Ω est un volume $\mathcal{V}$ de frontière $\mathcal{S}$ et de normale extérieure $\boldsymbol{n}$. Le champ inconnu T est un scalaire.

Le problème s'énonce ainsi :

- Trouver le champ de températures T tel que :

  $$\Delta T(M) = f(M) \;\; \forall M \in \mathcal{V}$$

  où $f(M)$ est une source de chaleur volumique connue.
- avec les conditions aux limites :

  $$\begin{aligned} T(N) &= T_f(N) \;\; \forall N \in \mathcal{S}_T \\ \mathbf{grad} T(N) \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}(N) &= \Phi_f(N) \;\; \forall N \in \mathcal{S}_f \end{aligned}$$

  (On impose un champ de température stationnaire sur la partie de frontière $\mathcal{S}_T$ et un champ de flux thermique stationnaire sur la partie de frontière $\mathcal{S}_f$)

En utilisant (5.1) page 44, on obtient une première forme variationnelle :

- Trouver le champ de températures T tel que :

  $$\int_{\mathcal{V}} \psi\;(\Delta T - f)\;\; dv = 0 \;\;\; \forall \psi(M) \text{ défini sur } \mathcal{V}$$

- avec les mêmes conditions aux limites.

En utilisant la formule (5.4) page 45 , on obtient une seconde forme variationnelle :

- Trouver le champ de températures T tel que :

$$-\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\psi \,\overline{\otimes}\, \mathbf{grad}T \; dv + \int_{\mathcal{S}} \psi \,\mathbf{grad}T \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds - \int_{\mathcal{V}} \psi \, f \; dv = 0 \quad \forall\psi$$

- avec les mêmes conditions aux limites.

Or, l'intégrale de bord peut se décomposer :

$$\int_{\mathcal{S}} \psi \,\mathbf{grad}T \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds = \int_{\mathcal{S}_T} \psi \,\mathbf{grad}T \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds + \int_{\mathcal{S}_f} \psi \,\mathbf{grad}T \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds$$

En tenant compte de la condition aux limites de flux sur $\mathcal{S}_f$, il vient :

$$\int_{\mathcal{S}} \psi \,\mathbf{grad}T \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds = \int_{\mathcal{S}_T} \psi \,\mathbf{grad}T \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds + \int_{\mathcal{S}_f} \psi \, \Phi_f \; ds$$

Finalement, la seconde forme variationnelle du problème est :

- Trouver le champ de températures T tel que :

$$\underbrace{-\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\psi \,\overline{\otimes}\, \mathbf{grad}T \; dv + \int_{\mathcal{S}_T} \psi \,\mathbf{grad}T \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds}_{\mathcal{A}(\psi,T)} = \underbrace{-\int_{\mathcal{S}_f} \psi \, \Phi_f \; ds + \int_{\mathcal{V}} \psi \, f \; dv \quad \forall\psi}_{\mathcal{B}(\psi)}$$

- avec la seule condition aux limites :

$$T\,(N) = T_f\,(N) \quad \forall N \in \mathcal{S}_T$$

Le problème thermique stationnaire se met bien sous la forme donnée en (5.2) page 44.

On peut obtenir une troisième forme variationnelle en utilisant la formule (5.3) page 45 :

- Trouver le champ de températures T tel que :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} T \,\Delta\psi \; dv - \int_{\mathcal{S}} T \,\mathbf{grad}\psi \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds + \int_{\mathcal{S}_T} \psi \,\mathbf{grad}T \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds =& \\ -\int_{\mathcal{S}_f} \psi \, \Phi_f \; ds + \int_{\mathcal{V}} \psi \, f \; dv = 0 \;\; \forall\psi&\end{aligned}$$

- avec la seule condition aux limites :

$$T\,(N) = T_f\,(N) \quad \forall N \in \mathcal{S}_T$$

En tenant compte de la condition aux limites de température sur $\mathcal{S}_T$, il vient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} T \,\mathbf{grad}\psi \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds &= \int_{\mathcal{S}_f} T \,\mathbf{grad}\psi \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds + \int_{\mathcal{S}_T} T \,\mathbf{grad}\psi \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds \\ &= \int_{\mathcal{S}_f} T \,\mathbf{grad}\psi \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds + \int_{\mathcal{S}_T} T_f \,\mathbf{grad}\psi \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds\end{aligned}$$

La troisième formulation variationnelle s'écrit donc encore :

– Trouver le champ de températures T tel que :

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} T\,\Delta\psi\,dv - \int_{\mathcal{S}_f} T\,\mathbf{grad}\psi \overline{\otimes} \boldsymbol{n}\,ds + \int_{\mathcal{S}_T} \psi\,\mathbf{grad}T \overline{\otimes} \boldsymbol{n}\,ds}_{\mathcal{A}(\psi,T)} = \underbrace{\int_{\mathcal{S}_T} T_f\,\mathbf{grad}\psi \overline{\otimes} \boldsymbol{n}\,ds - \int_{\mathcal{S}_f} \psi\,\Phi_f\,ds + \int_{\mathcal{V}} \psi\,f\,dv}_{\mathcal{B}(\psi)} \quad \forall\psi \tag{5.20}$$

– sans conditions supplémentaires.

Bien que pouvant sembler plaisante (il n'y a plus de conditions à respecter sur les frontières), cette dernière formulation présente des inconvénients qui apparaîtront dans le prochain chapitre.

5.5 Exemple 2 : Statique du solide déformable en petites déformations.

Le problème est :

– Trouver le champ de déplacements $\boldsymbol{\xi}$ tel que :

$$\underbrace{\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}}_{\mathcal{D}(\boldsymbol{\xi})} = 0$$

où $\boldsymbol{\sigma} = 2\,\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{\epsilon}\,\boldsymbol{G}$, et $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{grad}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{grad}^T\boldsymbol{\xi}\right)$ [5], si le solide déformable est élastique isotope linéaire en petites déformations.
Cette équation est une équation *vectorielle.*

– avec les conditions aux limites $\mathcal{C}(\boldsymbol{\xi})$:
  – des déplacements imposés [6] $\boldsymbol{\xi}_0(N)$ sur la partie de frontière $\mathcal{S}_d$:

$$\boldsymbol{\xi}(N) - \boldsymbol{\xi}_0(N) = 0 \;\; \forall N \in \mathcal{S}_d$$

  – des contraintes imposées [7] $\boldsymbol{q}_0(N)$ sur la partie de frontière $\mathcal{S}_f$:

$$\boldsymbol{\sigma}(N) \overline{\otimes} \boldsymbol{n}(N) - \boldsymbol{q}_0(N) = 0 \;\; \forall N \in \mathcal{S}_f$$

5.5.1 Première forme variationnelle

En utilisant (5.1) page 44, on obtient une première formulation équivalente :

– Trouver le champ de déplacements $\boldsymbol{\xi}$ tel que :

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\psi} \overline{\otimes} \left(\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}\right)\,dv = 0 \;\; \forall\boldsymbol{\psi}(M) \text{ champ vectoriel dans } \mathcal{V}. \tag{5.21}$$

5. On ne remplace pas $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\epsilon}$ par leurs valeurs en fonction de $\boldsymbol{\xi}$ pour alléger l'écriture. Si on le faisait, on obtiendrait l'équation de *Navier*. On peut très bien obtenir les mêmes formes variationnelles à partir des équations de Navier. L'inconvénient serait que les équations de Navier ne sont valables que pour les solides élastiques linéaires isotropes en petites déformations; alors que la formulation variationnelle qu'on va écrire ici est valable *pour toutes les lois de comportement* : il suffit de changer l'expression de $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction d'un tenseur de déformation et de préciser la définition du tenseur de déformation qu'on utilise.

6. éventuellement nuls

7. éventuellement nulles

où $\boldsymbol{\sigma} = 2\,\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{\epsilon}\,\boldsymbol{G}$, et $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{grad}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{grad}^T\boldsymbol{\xi}\right)$.
Cette équation est une équation *scalaire*.

– avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(N) - \boldsymbol{\xi}_0(N) &= 0 \;\; \forall N \in \mathcal{S}_d \\ \boldsymbol{\sigma}(N)\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}(N) - \boldsymbol{q}_0(N) &= 0 \;\; \forall N \in \mathcal{S}_f \end{aligned}$$

5.5.2 Seconde forme variationnelle

En utilisant la formule (5.10) page 45, on obtient le problème équivalent suivant :

– Trouver le champ de déplacements $\boldsymbol{\xi}$ tel que :

$$-\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\mathbf{grad}\boldsymbol{\psi}\;dv + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\psi}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{\sigma}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}\;ds + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\psi}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{f}\;dv = 0 \;\; \forall \boldsymbol{\psi}(M)$$

– avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(N) - \boldsymbol{\xi}_0(N) &= 0 \;\; \forall N \in \mathcal{S}_d \\ \boldsymbol{\sigma}(N)\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}(N) - \boldsymbol{q}_0(N) &= 0 \;\; \forall N \in \mathcal{S}_f \end{aligned}$$

L'intégrale de bord peut être décomposée en deux intégrales :

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\psi}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{\sigma}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}\;ds = \int_{\mathcal{S}_d} \boldsymbol{\psi}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{\sigma}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}\;ds + \int_{\mathcal{S}_f} \boldsymbol{\psi}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{\sigma}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}\;ds$$

On peut alors éliminer la condition aux limites de contrainte imposée en la reportant dans l'intégrale sur $\mathcal{S}_f$:

$$\int_{\mathcal{S}_f} \boldsymbol{\psi}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{\sigma}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}\;ds = \int_{\mathcal{S}_f} \boldsymbol{\psi}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{q}_0\;ds$$

Le problème devient :

– Trouver le champ de déplacements $\boldsymbol{\xi}$ tel que :

$$-\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\mathbf{grad}\boldsymbol{\psi}\;dv + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\psi}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{f}\;dv + \int_{\mathcal{S}_f} \boldsymbol{\psi}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{q}_0\;ds + \int_{\mathcal{S}_d} \boldsymbol{\psi}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{\sigma}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}\;ds = 0 \;\; \forall \boldsymbol{\psi}(M)$$

– avec la condition aux limites :

$$\boldsymbol{\xi}(N) - \boldsymbol{\xi}_0(N) = 0 \;\; \forall N \in \mathcal{S}_d$$

Le tenseur des contraintes étant symétrique, on peut écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\mathbf{grad}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\sigma}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\mathrm{Sym}(\mathbf{grad}\boldsymbol{\psi})$$

Le problème devient :

– Trouver le champ de déplacements $\boldsymbol{\xi}$ tel que :

$$-\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\mathrm{Sym}(\mathbf{grad}\boldsymbol{\psi})\;dv + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\psi}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{f}\;dv + \int_{\mathcal{S}_f} \boldsymbol{\psi}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{q}_0\;ds + \int_{\mathcal{S}_d} \boldsymbol{\psi}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{\sigma}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}\;ds = 0 \;\; \forall \boldsymbol{\psi}(M) \tag{5.22}$$

– avec la condition aux limites :

$$\boldsymbol{\xi}(N) - \boldsymbol{\xi}_0(N) = 0 \;\; \forall N \in \mathcal{S}_d$$

Interprétation mécanique :

Appelons «*champ de vitesses virtuelles*»[8] le champ vectoriel arbitraire $\boldsymbol{\psi}$.

Si $\boldsymbol{\psi}$ est une vitesse virtuelle, $\mathrm{Sym}(\mathbf{grad}\boldsymbol{\psi})$ s'interprète comme un tenseur des vitesses de déformations virtuel.

L'intégrale $\int_{\mathcal{V}} -\boldsymbol{\sigma} \overline{\overline{\otimes}} \mathrm{Sym}(\mathbf{grad}\boldsymbol{\psi})\, dv$ s'interprète alors comme une puissance virtuelle des efforts intérieurs dans le champ de vitesses virtuelles $\boldsymbol{\psi}$.

L'intégrale $\int_{\mathcal{S}_f} \boldsymbol{\psi} \overline{\otimes} \boldsymbol{q}_0\, ds$ s'interprète comme une puissance virtuelle des efforts de surface dans le champ de vitesses virtuelles $\boldsymbol{\psi}$.

L'intégrale $\int_{\mathcal{S}_d} \boldsymbol{\psi} \overline{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{n}\, ds$ s'interprète comme une puissance virtuelle des efforts de liaison dans le champ de vitesses virtuelles $\boldsymbol{\psi}$.

L'intégrale $\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\psi} \overline{\otimes} \boldsymbol{f}\, dv$ s'interprète comme une puissance virtuelle des efforts de volume dans le champ de vitesses virtuelles $\boldsymbol{\psi}$.

L'équation (5.22) exprime donc que la puissance virtuelle des efforts intérieurs et extérieurs est nulle dans tout champ de vitesses virtuelles appliqué à la solution, ce qui est l'expression du *théorème des puissances virtuelles*[9]. On pouvait donc déduire cette formulation par des raisonnements mécaniques. ■

On réécrit le problème (5.22) en isolant les termes contenant le champ inconnu $\boldsymbol{\xi}$:

- Trouver le champ de déplacements $\boldsymbol{\xi}$ tel que :

$$\underbrace{-\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \overline{\overline{\otimes}} \mathbf{grad}\boldsymbol{\psi}\, dv + \int_{\mathcal{S}_d} \boldsymbol{\psi} \overline{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{n}\, ds}_{\mathcal{A}(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\xi})} = \underbrace{-\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\psi} \overline{\otimes} \boldsymbol{f}\, dv - \int_{\mathcal{S}_f} \boldsymbol{\psi} \overline{\otimes} \boldsymbol{q}_0\, ds}_{\mathcal{B}(\boldsymbol{\psi})} \quad \forall \boldsymbol{\psi}(M) \tag{5.23}$$

  où $\boldsymbol{\sigma} = 2\,\mu \boldsymbol{\epsilon} + \lambda\, \mathrm{Tr}\boldsymbol{\epsilon}\, \boldsymbol{G}$, et $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{grad}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{grad}^T \boldsymbol{\xi}\right)$

- avec la condition aux limites :

$$\underbrace{\boldsymbol{\xi}(N) - \boldsymbol{\xi}_0(N)}_{\mathcal{C}'(\boldsymbol{\xi})} = 0 \quad \forall N \in \mathcal{S}_d$$

Le problème du solide élastique se met bien sous la forme donnée en (5.2) page 44.

Remarques :

On peut noter que la loi de comportement n'a pas été explicitement utilisée dans les transformations d'intégrales. Cette formulation variationnelle est en fait valable pour toute loi de comportement.

Si on admet la loi de comportement élastique linéaire isotrope en petites déformations, l'intégrale $\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \overline{\overline{\otimes}} \mathbf{grad}\boldsymbol{\psi}\, dv$ peut encore être transformée. On laisse le soin au lecteur de trouver une troisième forme variationnelle du problème[10], dans laquelle on pourra faire disparaître les conditions aux limites de déplacement imposé sur le bord.

8. On peut aussi bien l'appeler *déplacement virtuel*. Dans ce cas, les puissances virtuelles s'appellent *travaux virtuels*. A vrai dire, $\boldsymbol{\psi}$ est un champ arbitraire qu'on peut baptiser comme on veut. Ces dénominations sont censées aider à fixer les idées. Elles peuvent toutefois induire en erreur : on peut montrer en mécanique que quand on remplace les «vitesses virtuelles» par les vitesses réelles , les différentes intégrales donnent bien des puissances réelles, alors qu'il n'en est rien si on remplace les «déplacements virtuels» par les déplacements réels! On n'obtient que des intégrales homogènes à des travaux, mais qui ne sont pas les travaux réels.

9. Si $\boldsymbol{\psi}$ est appelé «déplacement virtuel», le théorème s'appelle *théorème des travaux virtuels*.

10. C'est la forme variationnelle qu'on obtiendrait directement à partir des équations de Navier.

5.6 Exemple 3 : Statique des coques

Le domaine Ω est une surface $\mathcal{S}$ de normale unitaire $\boldsymbol{n}$ ayant pour frontière une courbe $\mathcal{C}$ dont le trièdre de Darboux-Ribeaucourt est $\{\boldsymbol{n}_t, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}\}$ (voir figure 5.1 page 46).

Le problème s'énonce ainsi :

- Trouver le champ de déplacements $\boldsymbol{\xi}(M)$, $M \in \mathcal{S}$ satisfaisant en tout point M de $\mathcal{S}$ aux équations différentielles[11] :

$$\overline{\boldsymbol{p}} + \widetilde{\mathrm{div}}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi})\,\overline{\otimes}\,\widetilde{\mathbf{div}}\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad \text{(2 équations d'équilibre tangent)}$$
$$p^3 + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi})\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}) + \widetilde{\mathrm{div}}\widetilde{\mathbf{div}}\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad \text{(1 équation d'équilibre normal)}$$

  où

  - $\boldsymbol{p} = \overline{\boldsymbol{p}} + p^3\,\boldsymbol{n}$ est le chargement surfacique
  - $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi})$ est le tenseur tension (tenseur tangent). Cette fonction de $\boldsymbol{\xi}$ est la loi de comportement membranaire de la coque[12].
  - $\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\xi}) = \overline{\boldsymbol{E}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})$, où $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})$ est le tenseur des moments linéiques (tenseur tangent). Cette fonction de $\boldsymbol{\xi}$ est la loi de comportement de flexion de la coque[13].
  - $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi})$ est le tenseur courbure *de la surface déformée*[14]

- avec les conditions aux limites :
  - des déplacements imposés $\boldsymbol{\xi}_0(N)$ sur une partie de frontière $\mathcal{C}_d$:

$$\boldsymbol{\xi}(N) - \boldsymbol{\xi}_0(N) = \mathbf{0} \quad \forall N \in \mathcal{C}_d$$

  - des rotations $r_0(N)$ (autour de $\boldsymbol{t}$) imposées sur une partie de frontière $\mathcal{C}_r$:

$$\boldsymbol{t}\,\overline{\otimes}\,\widetilde{\mathbf{grad}\boldsymbol{\xi}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t - r_0(N) = 0 \quad \forall N \in \mathcal{C}_r$$

  - des tensions tangentes $\boldsymbol{T}_0(N)$ imposées sur une partie de frontière $\mathcal{C}_T$:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi}(N))\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t - \boldsymbol{t}_0(N) = \mathbf{0} \quad \forall N \in \mathcal{C}_T$$

  - des efforts tranchants $q_0(N)$ (suivant $\boldsymbol{n}$) imposés sur une partie de frontière $\mathcal{C}_q$:

$$\widetilde{\mathbf{div}}\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\xi}(N))\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t - q_0(N) = 0 \quad \forall N \in \mathcal{C}_q$$

  - des moments linéiques tangents $\boldsymbol{m}_0$ imposés sur une partie de frontière $\mathcal{C}_m$:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi}(N))\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t - \boldsymbol{m}_0 = -\overline{\boldsymbol{E}}\,\overline{\otimes}\,\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\xi}(N))\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t - \boldsymbol{m}_0 = \mathbf{0} \quad \forall N \in \mathcal{C}_m$$
$$\iff \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\xi}(N))\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t - \overline{\boldsymbol{E}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{m}_0 = \mathbf{0} \quad \forall N \in \mathcal{C}_m$$

11. Voir un cours de théorie des coques.
12. En petites déformations, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi})$ s'exprime en fonction du tenseur des petites déformations de surface $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi})$. En déformations finies, les lois de comportement sont plus compliquées.
13. En petites déformations $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})$ (ou $\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\xi})$) s'exprime en fonction du tenseur de variations de courbures $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\xi})$. En déformations finies, les lois de comportement sont plus compliquées.
14. En petites déformations de coques on a $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\xi})$, où $\boldsymbol{B}_0$ est la courbure initiale et $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\xi})$ est le tenseur de variation de courbure (tenseur tangent) linéarisé en $\boldsymbol{\xi}$. En déformations finies, l'expression de la courbure actuelle $\boldsymbol{B}$ en fonction de $\boldsymbol{B}_0$ et $\boldsymbol{\xi}$ est une expression non linéaire plus compliquée.

5.6.1 Première forme variationnelle

Trouver le champ de déplacements $\boldsymbol{\xi}(M)$ tel que :

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \left(\overline{\boldsymbol{p}} + \widetilde{\mathrm{div}} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}) \,\overline{\otimes}\, \widetilde{\mathbf{div}} \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\xi}) \right) ds = \mathbf{0} \;\; \forall \boldsymbol{\psi}(M) \text{ champ vectoriel tangent} \tag{5.24}$$

$$\int_{\mathcal{S}} \phi \left(p^3 + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}) + \widetilde{\mathrm{div}} \widetilde{\mathbf{div}} \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\xi}) \right) ds = 0 \;\; \forall \phi(M) \text{ champ scalaire} \tag{5.25}$$

avec les mêmes conditions aux limites que pour la forme différentielle du problème.

5.6.2 Seconde forme variationnelle

En utilisant (5.17) page 47, on transforme les intégrales de (5.24) :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \widetilde{\mathrm{div}} \boldsymbol{T} \, ds &= -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{T} \, ds + \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{n}_t \, dl \\
&= -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{T} \, ds + \int_{\mathcal{C}_T} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{t}_0 \, dl + \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_T} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{n}_t \, dl \\
\int_{\mathcal{S}} -\boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \widetilde{\mathbf{div}} \widetilde{\boldsymbol{M}} \, ds &= \int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}} (\boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \widetilde{\boldsymbol{M}} \, ds - \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \widetilde{\boldsymbol{M}} \otimes \boldsymbol{n}_t \, dl \\
&= \int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}} (\boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \widetilde{\boldsymbol{M}} \, ds - \int_{\mathcal{C}_m} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \overline{\boldsymbol{E}} \otimes \boldsymbol{m}_0 \, dl \\
&\quad - \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_m} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \widetilde{\boldsymbol{M}} \otimes \boldsymbol{n}_t \, dl
\end{aligned}$$

En utilisant (5.15) page 47, on transforme les intégrales de (5.25) :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \phi \, \widetilde{\mathrm{div}} \widetilde{\mathbf{div}} \widetilde{\boldsymbol{M}} \, ds &= -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{div}} \widetilde{\boldsymbol{M}} \,\overline{\otimes}\, \widetilde{\mathbf{grad}} \phi \, ds + \int_{\mathcal{C}} \phi \, \widetilde{\mathbf{div}} \widetilde{\boldsymbol{M}} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t \, dl \\
&= -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{div}} \widetilde{\boldsymbol{M}} \,\overline{\otimes}\, \widetilde{\mathbf{grad}} \phi \, ds + \int_{\mathcal{C}_q} \phi \, q_0 \, dl + \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_q} \phi \, \widetilde{\mathbf{div}} \widetilde{\boldsymbol{M}} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t \, dl
\end{aligned}$$

On peut noter qu'avec ces transformations d'intégrales, les conditions aux limites en effort (tensions, moments linéiques et efforts tranchants) peuvent être prises en compte.

Finalement, (5.24) devient :

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{T} \, ds + \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_T} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{T} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t \, dl + \int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}} (\boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \widetilde{\boldsymbol{M}} \, ds + \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_m} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \widetilde{\boldsymbol{M}} \otimes \boldsymbol{n}_t \, dl \\
- \int_{\mathcal{C}_m} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \overline{\boldsymbol{E}} \otimes \boldsymbol{m}_0 \, dl = -\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \overline{\boldsymbol{p}} - \int_{\mathcal{C}_T} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{t}_0 \, dl
\end{aligned} \tag{5.26}$$

et (5.25) devient :

$$\int_{\mathcal{S}} \phi \, \boldsymbol{T} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{B} - \int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{div}} \widetilde{\boldsymbol{M}} \,\overline{\otimes}\, \widetilde{\mathbf{grad}} \phi \, ds + \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_q} \phi \, \widetilde{\mathbf{div}} \widetilde{\boldsymbol{M}} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t \, dl = -\int_{\mathcal{S}} \phi \, p^3 \, ds - \int_{\mathcal{C}_q} \phi \, q_0 \, dl \tag{5.27}$$

où $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi})$ est la courbure après déformation. Elle est fonction (en général non linéaire) du champ de déplacements (et aussi de la courbure initiale) ;
et $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi})$ et $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})$ (ou $\widetilde{\boldsymbol{M}} = \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\xi})$) sont les lois de comportement de la coque qui varient suivant les théories utilisées.
On peut encore noter que l'intégrale de bord $\int_{\mathcal{C}_m} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \overline{\boldsymbol{E}} \otimes \boldsymbol{m}_0 \, dl$ reste une fonction de $\boldsymbol{\xi}$ à cause de la variation de courbure[15].

15. Certains auteurs négligent la variation de courbure dans ce terme ($\boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{B}_0$) pour pouvoir le faire passer dans le second membre. De même, le terme $\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}} (\boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B}) \,\overline{\overline{\otimes}}\, \widetilde{\boldsymbol{M}} \, ds$ est parfois simplifié en $\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{B} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \widetilde{\boldsymbol{M}} \, ds$

5.6.3 Une variante de la formulation précédente

En utilisant (5.17) page 47, on peut encore transformer les intégrales de (5.27) page 53 :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{div}\boldsymbol{M}} \otimes \widetilde{\mathbf{grad}\phi}\, ds &= -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}\,\mathbf{grad}\phi} \overline{\overline{\otimes}}\, \widetilde{\boldsymbol{M}}\, ds + \int_{\mathcal{C}} \widetilde{\mathbf{grad}\phi} \overline{\otimes}\, \widetilde{\boldsymbol{M}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t\, dl \\ &= -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}\,\mathbf{grad}\phi} \overline{\overline{\otimes}}\, \widetilde{\boldsymbol{M}}\, ds + \int_{\mathcal{C}_m} \widetilde{\mathbf{grad}\phi} \overline{\otimes}\, \overline{\boldsymbol{E}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{m}_0\, dl \\ &+ \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_m} \widetilde{\mathbf{grad}\phi} \overline{\otimes}\, \widetilde{\boldsymbol{M}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t\, dl\end{aligned}$$

L'équation (5.27) page 53 devient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \phi\, \boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{B} + \int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}\,\mathbf{grad}\phi} \overline{\overline{\otimes}}\, \widetilde{\boldsymbol{M}}\, ds - \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_m} \widetilde{\mathbf{grad}\phi} \overline{\otimes}\, \widetilde{\boldsymbol{M}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t\, dl + \int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_q} \phi\, \widetilde{\mathbf{div}\boldsymbol{M}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{n}_t\, dl = \\ -\int_{\mathcal{S}} \phi\, p^3\, ds - \int_{\mathcal{C}_q} \phi\, q_0\, dl + \int_{\mathcal{C}_m} \widetilde{\mathbf{grad}\phi} \overline{\otimes}\, \overline{\boldsymbol{E}} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{m}_0\, dl\end{aligned}$$

5.6.4 Remarques

L'interprétation de ces intégrales en termes de «puissances virtuelles» (ou de «travaux virtuels») est beaucoup plus délicate que pour les problèmes de solides tridimensionnels en raison de la complexité géométrique due à la variation de la courbure des coques pendant la déformations. Les auteurs qui tentent d'établir des formulations variationnelles à partir d'interprétations mécaniques des champs arbitraires $\boldsymbol{\psi}$ et ϕ sont amenés à faire des hypothèses simplificatrices plus ou moins justifiées pour garder des interprétations simples.

D'autre part, bien que la déformation et les changement de courbure d'un milieu continu bidimensionnel soit complètement déterminée par le champ de déplacement, la plupart des éléments finis utilisés dans les logiciels utilisent des degrés de liberté «de rotation»[16]. Ces degrés de liberté de rotation posent deux problèmes :

- Dans les problèmes modélisant à la fois des coques et des milieux massifs, on a du mal à écrire les conditions de raccord entre les deux types de milieux continus
- Les seules rotations engendrant une «puissance virtuelle» sont les rotations tangentes à la coques. Que faire de la partie normale de la rotation ?

Enfin, les formulations variationnellles données ici sont valables pour toutes les lois de comportement ($\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi})$ et $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})$).

Point de vue personnel: Plutôt que de chercher à «faire de la mécanique avec les éléments finis»[17], il me semble plus sain d'établir un théorie de coques[18] avec une loi de comportement établie sur des hypothèses physiques précises[19], et de ne passer qu'ensuite à des formulations variationnelles du système différentiel pour la résolution numérique du problème.

5.7 Formulations à plusieurs champs

Bien qu'introduisant un plus grand nombre de d'inconnues par nœuds, les formulations qui suivent présentent des avantages quand les grandeurs pertinentes pour juger des résultats sont des gran-

16. Ils sont introduits par des interprétations mécaniques de «puissances virtuelles de flexion ou de torsion»
17. C'est à dire considérer les éléments finis comme de petits bouts de matière avec une loi de comportement.
18. Les équations différentielles d'équilibre des coques données ici sont exemptes de toute hypothèse
19. petites ou grandes déformations, hypothèses cinématiques diverses sur les normales matérielles, développements asymptotiques, etc

deurs dérivées de l'inconnue principale.

En effet, on verra en 7.1.2 page 68 que la continuité interéléments des grandeurs dérivées n'est pas assurée [20], ce qui rend malcommode leur représentation et leur exploitation.

Il peut être judicieux de considérer les grandeurs auxquelles on s'intéresse comme des inconnues (aux nœuds) et non comme des grandeurs dérivées de la solution.

Exemple : Formulation à deux champs d'un problème de statique des solides :

Le problème de statique des solides peut être vu comme la solution du système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} - \mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

où la loi de comportement $\mathcal{G}$ est un opérateur différentiel. Le problème est complété par des conditions aux limites.

Ce qui conduit à la formulation :

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\phi} \overline{\otimes} \left(\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}\right) dv = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\phi} \text{ champ vectoriel} \tag{5.28}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\psi} \overline{\overline{\otimes}} \left(\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})\right) dv = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\psi} \text{ champ tensoriel symétrique} \tag{5.29}$$

On en déduit d'autres par transformations d'intégrales : l'équation (5.28) se transforme comme précédemment (voir (5.23) page 51)

$$\underbrace{-\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \overline{\overline{\otimes}} \mathbf{grad}\boldsymbol{\phi}\, dv + \int_{\mathcal{S}_d} \boldsymbol{\phi} \overline{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{n}\, ds}_{\mathcal{A}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\xi})} = \underbrace{-\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\phi} \overline{\otimes} \boldsymbol{f}\, dv - \int_{\mathcal{S}_f} \boldsymbol{\phi} \overline{\otimes} \boldsymbol{q}_0\, ds}_{\mathcal{B}(\boldsymbol{\phi})} \quad \forall \boldsymbol{\phi}(M) \text{ champ vectoriel}$$

La transformation de l'équation (5.29) dépend de la loi de comportement $\mathcal{G}$.
Par exemple, en élasticité linéaire isotrope petites déformations,

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}) = 2\,\mu\,\mathrm{Sym}(\mathbf{grad}\boldsymbol{\xi}) + \lambda\,\mathrm{div}\boldsymbol{\xi}\;\boldsymbol{G}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\psi} \overline{\overline{\otimes}} \mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})\, dv &= \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\psi} \overline{\overline{\otimes}} \left(2\,\mu\,\mathrm{Sym}(\mathbf{grad}\boldsymbol{\xi}) + \lambda\,\mathrm{div}\boldsymbol{\xi}\;\boldsymbol{G}\right) dv \\ &= \int_{\mathcal{V}} 2\,\mu\,\boldsymbol{\psi} \overline{\overline{\otimes}} \mathbf{grad}\boldsymbol{\xi}\, dv + \int_{\mathcal{V}} \lambda\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{\psi}\,\mathrm{div}\boldsymbol{\xi}\, dv \\ &= -\int_{\mathcal{V}} 2\,\mu\,\boldsymbol{\xi} \overline{\otimes} \mathbf{div}\boldsymbol{\psi}\, dv + \int_{\mathcal{S}} 2\,\mu\,\boldsymbol{\xi} \overline{\otimes} \boldsymbol{\psi} \overline{\otimes} \boldsymbol{n}\, ds \\ &\quad - \int_{\mathcal{V}} \lambda\,\boldsymbol{\xi} \overline{\otimes} \mathbf{grad}\mathrm{Tr}\boldsymbol{\psi}\, dv + \int_{\mathcal{S}} \lambda\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{\psi}\,\boldsymbol{\xi} \overline{\otimes} \boldsymbol{n}\, ds \end{aligned}$$

l'équation (5.29) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\psi} \overline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{\sigma}\, dv + \int_{\mathcal{V}} 2\,\mu\,\boldsymbol{\xi} \overline{\otimes} \mathbf{div}\boldsymbol{\psi}\, dv + \int_{\mathcal{V}} \lambda\,\boldsymbol{\xi} \overline{\otimes} \mathbf{grad}\mathrm{Tr}\boldsymbol{\psi}\, dv - \int_{\mathcal{S}} 2\,\mu\,\boldsymbol{\xi} \overline{\otimes} \boldsymbol{\psi} \overline{\otimes} \boldsymbol{n}\, ds \\ - \int_{\mathcal{S}} \lambda\,\mathrm{Tr}\boldsymbol{\psi}\,\boldsymbol{\xi} \overline{\otimes} \boldsymbol{n}\, ds = 0 \quad \forall \boldsymbol{\psi} \text{ champ tensoriel symétrique} \end{aligned}$$

20. Parfois, on n'évalue ces grandeurs dérivées qu'en certains points de l'élément (les points de Gauss)

dans laquelle on peut faire intervenir des conditions aux limites de déplacement dans les intégrales de bord.

Dans cette formulation, les inconnues sont $\boldsymbol{\sigma}$ (6 ddl) et $\boldsymbol{\xi}$ (3 ddl), mais on obtiendra des valeurs de contraintes aux nœuds. L'équation d'équilibre et la loi de comportement ont une formulation «faible», c'est à dire qu'elles seront ne seront respectées que globalement par la solution approchée [21]. On laisse le soin au lecteur d'écrire une formulation à trois champs en prenant comme inconnues $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\epsilon}$[22].

Le choix entre ces deux formulations résulte d'un compromis : si on utilise des éléments conformes,

- soit on a 9 inconnues par nœud et une solution approchée continue en déplacement et en contraintes,
- soit on a seulement trois inconnues par nœud avec une solution approchée continue en déplacements mais discontinue en contraintes [23].

On peut employer le même procédé pour obtenir des contraintes continues dans les problèmes de coques.

Il faut constater que dans les logiciels industriels courants actuels, on a généralement choisi des formulations avec le plus faible nombre d'inconnues possibles.

5.8 Conclusion

On peut donner beaucoup de formes variationnelles à un problème de physique donné sous forme différentielle :

- en choisissant les inconnues principales du problème
- en utilisant plus ou moins de transformations d'intégrales

Le choix de l'une d'entre elle pour obtenir une approximation de la solution par éléments finis est guidé par :

- le nombre de champs inconnus (coût du calcul)
- l'ordre de dérivation des inconnues et des champs arbitraires (On verra dans le chapitre suivant que cet ordre de dérivation a des conséquences sur le choix des fonctions d'interpolation).

Dans les logiciels d'éléments finis orientés «métier», ce choix est rarement laissé à l'utilisateur. Ce sont souvent des «boîtes noires» dans lesquelles la formulation variationnelle est codée.

21. alors que dans la formulation à un champ, seule l'équation d'équilibre avait une formulation faible.
22. qui présente peu d'intérêt si la relation entre $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\epsilon}$ n'est pas différentielle (elle conserve donc la continuité interélément).
23. La taille du problème (et sa place en mémoire) est divisée par 3 , et le temps de calcul est environ divisé par $3^3 = 27$. La continuité des contraintes coûte cher en ressources informatiques, mais le matériel évolue...

Chapitre 6

La discrétisation

Que le problème à résoudre soit formulé sous forme différentielle ou sous forme intégrale, sa solution exacte est toujours inaccessible. L'objet de ce chapitre est de montrer comment choisir une solution approchée dans la famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}^1(\Omega)^{n_{ddl}}$ de fonctions construite par les opérations de maillage et de choix d'éléments (voir (4.8) page 41). On rappelle que chaque fonction $\boldsymbol{F}(M)$ de $\mathcal{F}$ peut s'écrire :

$$\boldsymbol{F}(M) = \sum_{j=1}^{N_{ddl}} u^{(j)}\, \boldsymbol{F}^{(j)}(M)$$

et que les fonctions de base $\boldsymbol{F}^{(j)}(M)$ de l'espace $\mathcal{F}$ sont des fonctions[1] nulles partout, sauf dans les éléments qui contiennent le nœud j.

6.1 Principe de la discrétisation

On a vu dans le chapitre précédent que la formulation variationnelle exacte d'un problème peut se mettre sous la forme :

– Trouver $\boldsymbol{u}(M)$ tel que

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{u}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{\psi}) \quad \forall \boldsymbol{\psi}(M) \text{ défini dans } \Omega$$

– avec les conditions (éventuellement vides)

$$\mathcal{C}'(\boldsymbol{u}) = 0$$

Si on cherche une solution appartenant à l'espace $\mathcal{F}$, on obtient le problème approché suivant :

– Trouver $\boldsymbol{F}(M)$ tel que

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{F}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{\psi}) \quad \forall \boldsymbol{\psi}(M) \text{ défini dans } \Omega \tag{6.1}$$

– avec les conditions aux limites :

$$\mathcal{C}'(\boldsymbol{F}) = 0$$

1. On rappelle que ces fonctions de forme ne sont pas polynômiales en général, sauf si l'interpolation géométrique τ est strictement linéaire (Voir note 18 page 34).

Ce problème n'a en général pas de solution [2].

On va donc remplacer la condition «$\forall \boldsymbol{\psi}(M)$» par une condition moins contraignante :
On ne cherche à satisfaire l'équation (6.1) *que pour certains* $\boldsymbol{\psi}(M)$.

D'autre part, il faut respecter les conditions aux limites $\mathcal{C}'(\boldsymbol{F}) = 0$ si elles existent [3]. On restreint donc l'espace $\mathcal{F}$ aux seules fonctions qui respectent ces conditions. On appelle $\mathcal{F}_{ad}$ l'espace des *fonctions admissibles*, c'est à dire l'espace des fonctions qui satisfont aux conditions aux limites $\mathcal{C}'(\boldsymbol{F}) = 0$.

$\mathcal{F}_{ad}$ *est un sous espace de* $\mathcal{F}$. En effet, imposer les conditions $\mathcal{C}'(\boldsymbol{F}) = 0$ revient à imposer N_C relations sur les valeurs des $u^{(i)}$. La dimension de l'espace des fonctions admissibles est donc $N_{inc} = N_{ddl} - N_C$.

Pour déterminer une fonction $\boldsymbol{F}(M) \in \mathcal{F}_{ad}$, il faut déterminer un N_{inc}-uplet de valeurs :

$$\left\{u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(i)}, \ldots, u^{(N_{inc})}\right\}$$

Si on a choisi correctement N_{inc} fonctions $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(M)$, pour chacune d'elles, l'équation (6.1) va fournir une équation scalaire :

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\psi}^{(i)}, \boldsymbol{F}) - \mathcal{B}(\boldsymbol{\psi}^{(i)}) = 0 \ \text{ où } \ \boldsymbol{F} = \sum_{j=1}^{N_{ddl}} u^{(j)}\, \boldsymbol{F}^{(j)} \tag{6.2}$$

La construction de ce système d'équations s'appelle *l'assemblage*.
Les fonctions $\boldsymbol{\psi}^{(i)}$ choisies sont souvent appelées *fonctions test*.

Pour trouver une solution approchée, on a donc un système de N_{inc} équations à N_{inc} inconnues $\left\{u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(i)}, \ldots, u^{(N_{inc})}\right\}$ à résoudre.

- Si $\mathcal{A}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{u})$ est une application linéaire en $\boldsymbol{u}$, les termes $\mathcal{A}(\boldsymbol{\psi}^{(i)}, \boldsymbol{F})$ conduisent à un système linéaire en $u^{(i)}$. Cette classe de problèmes est appelée *problèmes linéaires* [4].
- Si $\mathcal{A}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{u})$ n'est pas linéaire en $\boldsymbol{u}$, la solution du système (6.2) est plus complexe [5]. Il existe cependant des méthodes numériques pour le résoudre qui se ramènent à une successsion de problèmes linéaires.

Tout le problème réside donc dans le choix judicieux des fonctions $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(M)$:

- Une condition impérative est que le choix des $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(M)$ doit être tel que le système d'équations (6.2) soit régulier.
  En particulier, le choix des $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(M)$ et le choix de l'espace des fonctions d'interpolation $\mathcal{F}(M)$ ne sont pas indépendants du choix de la formulation variationnelle : En effet, à chaque transformation d'intégrale sur Ω, on diminue l'ordre de dérivation de $\boldsymbol{u}$ et on augmente l'ordre de dérivation de $\boldsymbol{\psi}$. Il faut donc que les fonctions $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{\psi}$ aient des dérivées d'un ordre suffisant non nulles partout pour que le système soit régulier [6].
- On dispose d'algorithmes efficaces pour la résolution de systèmes linéaires symétriques. On préfèrera donc un choix de $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(M)$ qui conduit à un système symétrique [7].

2. sauf si par chance la solution exacte appartenait à $\mathcal{F}$.
3. En effet, on a vu dans le chapitre précédent que suivant le nombre de transformations d'intégrales qu'on effectue, le nombre de conditions à imposer à la solution diminue, et peut même être réduit à 0. On peut aussi se référer à l'exemple 2.2 page 9.
4. Le lecteur est invité à vérifier que les problèmes de mécanique traités en exemple dans le chapitre précédent qu'une condition nécessaire (mais pas suffisante) est que la loi de comportement soit linéaire.
5. On peut noter que l'unicité et la convergence de la solution par élements finis n'est classiquement établie que pour les problèmes linéaires. Dans presque tous les autres cas, la méthode des éléments finis reste heuristique.
6. Par exemple, dans la formulation (5.20) page 49, la fonction ψ apparaît sous la forme de son laplacien. Il faut choisir des fonctions ψ à laplacien non nul partout. Une interpolation linéaire ne conviendrait pas.
7. Le choix fait dans l'exemple 2.2 page 9 n'est donc pas judicieux de ce point de vue.

Il existe plusieurs méthodes pour choisir les fonctions $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(M)$. Elles peuvent conduire à des systèmes symétriques ou non, et la précision de la solution est plus ou moins sensible au choix des $\boldsymbol{\psi}$. On ne développe ici que la méthode la plus utilisée dans les logiciels d'éléments finis : la méthode de Galerkine.

6.2 La méthode de Galerkine

On choisit comme fonctions $\boldsymbol{\psi}^{(i)}$ les fonctions de base de l'espace $\mathcal{F}_{ad}$. Ce choix a les conséquences suivantes :

- Le nombre de fonctions $\boldsymbol{\psi}^{(i)}$ (et donc le nombre d'équations scalaires) est automatiquement égal au nombre d'inconnues N_{inc}.
- On montre en analyse numérique que le système d'équations (6.2) page 58 obtenu pour ce choix de $\boldsymbol{\psi}^{(i)}$ est nécessairement régulier pour une classe de problèmes appelés *problèmes elliptiques* : dans ce cas, $\mathcal{A}(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{u})$ et $\mathcal{B}(\boldsymbol{\psi})$ doivent être linéaires en $\boldsymbol{u}$ et en $\boldsymbol{\psi}$,
$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\psi}^{(i)},\boldsymbol{F}) = \mathcal{A}(F^{(i)},\sum_{j=1}^{N_{ddl}} u^{(j)}\,\boldsymbol{F}^{(j)})$$
et $\mathcal{A}(\boldsymbol{F}^{(i)},\sum_{j=1}^{N_{ddl}} u^{(j)}\,\boldsymbol{F}^{(j)})$ doit être une forme quadratique définie positive en $\boldsymbol{F}^{(j)}$.
Pour les autres problèmes, soit le système d'équations n'est pas linéaire en $u^{(j)}$, soit il est linéaire mais non garanti régulier, et la méthode de Galerkine peut se révéler inadéquate.
- Le fait de choisir des fonctions $\boldsymbol{\psi}^{(i)}$ appartenant à $\mathcal{F}_{ad}$ peut simplifier certaines intégrales de bord.
- La méthode de Galerkine impose une contrainte sur le choix de la forme variationnelle : les fonctions $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(M)$ et les fonctions d'interpolation $\boldsymbol{F}(M)$ appartenant au même espace de fonctions, il faut choisir une forme variationnelle dans laquelle les dérivées des fonctions $\boldsymbol{\psi}$ et $\boldsymbol{u}$ soient d'un ordre tel qu'elles ne s'annulent pas partout.

La recherche de la solution approchée se ramène donc à la résolution du système d'équations :
$$\mathcal{A}\left(F^{(i)},\sum_{j=1}^{N_{ddl}} u^{(j)}\,F^{(j)}\right) - \mathcal{B}\left(F^{(i)}\right) = 0$$
Les $u^{(j)}$ trouvés déterminent la solution approchée F. Ce système est linéaire et régulier pour les problèmes elliptiques.

6.3 Application de la méthode de Galerkine au problème thermique stationnaire

On a trouvé trois formes variationnelles pour le problème thermique stationnaire.

6.3.1 forme 1

- Trouver le champ de températures T tel que :
$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \psi\;(\Delta T - f)\;dv}_{\mathcal{A}(\psi,T)} = 0 \quad \forall\psi(M) \text{ défini sur } \mathcal{V}$$

– avec les conditions aux limites :

$$T(N) = T_f(N) \quad \forall N \in \mathcal{S}_T$$
$$\mathbf{grad}T(N) \overline{\otimes} \boldsymbol{n}(N) = \Phi_f(N) \quad \forall N \in \mathcal{S}_f$$

La fonction inconnue $T(M)$ apparaît par son laplacien. Il faut donc choisir un espace d'interpolation $\mathcal{F}$ tel que le laplacien de ses fonctions de base soit non nul, ce qui interdit les interpolations linéaires. D'autre part, la construction de l'espace $\mathcal{F}_{ad}$ respectant la condition de flux est difficile: Il faut choisir des éléments qui contrôlent la dérivée normale au bord, ce qui est difficile[8].

Par contre, l'espace des fonctions test (qui est aussi $\mathcal{F}_{ad}$) paraît trop luxueux, car ψ n'est pas dérivé dans cette formulation.

La forme $\mathcal{A}(\psi, T)$ est bien linéaire en ψ et T. Le système en $T^{(i)}$ est donc linéaire et régulier. Bien que la méthode de Galerkine appliquée à cette formulation paraisse «déséquilibrée» du point de vue des dérivées de ψ et T, elle est pratiquable si on dispose d'éléments adéquats.

6.3.2 forme 2

– Trouver le champ de températures T tel que :

$$\underbrace{-\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\psi \overline{\otimes} \mathbf{grad}T \, dv + \int_{\mathcal{S}_T} \psi \, \mathbf{grad}T \overline{\otimes} \boldsymbol{n} \, ds}_{\mathcal{A}(\psi,T)} = \underbrace{-\int_{\mathcal{S}_f} \psi \, \Phi_f \, ds + \int_{\mathcal{V}} \psi \, f \, dv}_{\mathcal{B}(\psi)} \quad \forall \psi$$

– avec la seule condition aux limites :

$$T(N) = T_f(N) \quad \forall N \in \mathcal{S}_T$$

Les fonctions ψ et T n'apparaissent que sous la forme de leur gradient. On peut donc choisir un espace d'interpolation $\mathcal{F}$ plus simple : il suffit que les fonctions de base de $\mathcal{F}$ aient un gradient non nul. On peut donc prendre des éléments plus simples : des interpolations linéaires[9] sont suffisantes.

L'espace $\mathcal{F}_{ad}$ est plus facile à construire[10]: il suffit d'imposer des valeurs aux $T^{(j)}$ sur la frontière $\mathcal{S}_T$.

D'autre part, puisque $\psi \in \mathcal{F}_{ad}$, on a

$$\int_{\mathcal{S}_T} \psi \, \mathbf{grad}T \overline{\otimes} \boldsymbol{n} \, ds = \int_{\mathcal{S}_T} T_f \, \mathbf{grad}T \overline{\otimes} \boldsymbol{n} \, ds$$

Cette intégrale est plus facile à calculer.

La forme $\mathcal{A}(\psi, T)$ est toujours linéaire en ψ et T. Le système algébrique

$$-\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}F^{(i)} \overline{\otimes} \sum_{j=1}^{N_{inc}} T^{(j)} \mathbf{grad}F^{(j)} \, dv + \int_{\mathcal{S}_T} T_f \sum_{j=1}^{N_{inc}} T^{(j)} \mathbf{grad}F^{(j)} \overline{\otimes} \boldsymbol{n} \, ds = -\int_{\mathcal{S}_f} F^{(i)} \, \Phi_f \, ds + \int_{\mathcal{V}} F^{(i)} \, f \, dv$$

8. On verra plus loin (Remarque page 63, qu'en fait il n'est pas absolument nécessaire de construire $\mathcal{F}_{ad}$. Cette objection peut être contournée.

9. Il n'est pas interdit de prendre des interpolations de degré supéreur pour améliorer la qualité de la solution approchée.

10. voir note 8

est linéaire en $T^{(i)}$. Cette formulation variationnelle est bien adaptée à la méthode de Galerkine.

Les intégrales sur $\mathcal{V}$ se ramènent à une somme d'intégrales sur les mailles. Par exemple :

$$\int_{\mathcal{V}} F^{(i)} f \, dv = \sum_{m=1}^{N_m} \int_{\Omega_m} F^{(i)} f \, dv$$

où N_m est le nombre de mailles. Il est à noter que les intégrales de volume et de surface de l'équation i ne portent finalement que sur les fonctions de base de l'espace d'interpolation[11].

Ces intégrales sur les mailles ne sont non nulles que sur les mailles qui contiennent le nœud i. On ne les calcule donc que sur les mailles qui contiennent ce nœud. Les inconnues qui interviennent dans l'équation i sont donc uniquement les $T^{(k)}$ tels que le nœud k appartient à une maille contenant le nœud i. Il en est de même pour les intégrales de surface. Il reste donc :

$$\int_{\mathcal{V}} F^{(i)} f \, dv = \sum_{m \in I} \int_{\Omega_m} F^{(i)} f \, dv$$

où I est l'ensemble des mailles contenant le nœud i.

6.3.3 forme 3

La troisième formulation variationnelle du problème thermique stationnaire a les mêmes inconvénients que la première : les fonctions tests apparaissent sous la forme de laplacien, et demandent donc un espace de fonctions d'interpolation avec des fonctions de base à laplacien non nul partout. La méthode de Galerkine est peu adéquate pour cette formulation du problème.

6.4 Application de la méthode de Galerkine au problème de statique de solide déformable

Pour les mêmes raisons que dans l'exemple précédent, on choisit la formulation variationnelle :

- Trouver le champ de déplacements $\boldsymbol{\xi}$ tel que :

$$\underbrace{-\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \overline{\overline{\otimes}} \operatorname{Sym} \mathbf{grad} \boldsymbol{\psi} \, dv + \int_{\mathcal{S}_d} \boldsymbol{\psi} \overline{\otimes} \boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{n} \, ds}_{\mathcal{A}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\xi})} = \underbrace{-\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\psi} \overline{\otimes} \boldsymbol{f} \, dv - \int_{\mathcal{S}_f} \boldsymbol{\psi} \overline{\otimes} \boldsymbol{q}_0 \, ds}_{\mathcal{B}(\boldsymbol{\psi})} \quad \forall \boldsymbol{\psi}(M) \tag{6.3}$$

  où $\boldsymbol{\sigma} = 2\,\mu \boldsymbol{\epsilon} + \lambda \operatorname{Tr} \boldsymbol{\epsilon}\, \boldsymbol{G}$, et $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{grad} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{grad}^T \boldsymbol{\xi}\right)$

- avec la condition aux limites :

$$\underbrace{\boldsymbol{\xi}(N) - \boldsymbol{\xi}_0(N)}_{\mathcal{C}'(\boldsymbol{\xi})} = 0 \;\; \forall N \in \mathcal{S}_d$$

Dans cette formulation, l'inconnue $\boldsymbol{\xi}$ et les fonctions $\boldsymbol{\psi}$ apparaissent tous les deux sous la forme de leur gradient.

11. On rappelle aussi que, si on utilise des éléments de référence, les intégrales sur un élément réel se ramènent à une intégrale sur l'élément de référence, et qu'elles peuvent être partiellement préparées à l'avance. Voir section 4.5 page 35.

D'autre part, $\boldsymbol{\psi}$ appartenant à $\mathcal{F}_{ad}$, on a

$$\int_{\mathcal{S}_d} \boldsymbol{\psi} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{\sigma} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds = \int_{\mathcal{S}_d} \boldsymbol{\xi}_0 \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{\sigma} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds$$

Le problème discrétisé est donc :

Trouver les N_{inc} valeurs $\xi^{(i)}$ tel que :

$$-\int_{\mathcal{V}} \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \,\overline{\overline{\otimes}}\, \mathrm{Sym}\,\mathbf{grad}\boldsymbol{F}^{(i)} \; dv + \int_{\mathcal{S}_d} \boldsymbol{\xi}_0^{(i)} \,\overline{\otimes}\, \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{n} \; ds = -\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{F}^{(i)} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{f} \; dv - \int_{\mathcal{S}_f} F^{(i)} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{q}_0 \; ds \qquad \forall \boldsymbol{F}^{(i)} \text{ base de } \mathcal{F}_{ad} \tag{6.4}$$

où $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2\,\mu\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} + \lambda\,\mathrm{Tr}\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}\,\boldsymbol{G}$, et $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \displaystyle\sum_{j=1}^{N_{inc}} \xi^{(j)}\,\mathrm{Sym}\,\mathbf{grad}\boldsymbol{F}^{(i)}$

Là encore, les intégrales de volume et de surface de l'équation i se réduisent à des intégrales sur les seules mailles qui contiennent le nœud i.

6.5 L'assemblage dans la méthode de Galerkine

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire le système d'équations à résoudre.

Le fait de choisir comme fonctions $\boldsymbol{\psi}$ les fonctions de base de l'espace $\mathcal{F}_{ad}$ simplifie beaucoup le calcul des intégrales. Comme on l'a vu dans les exemples précédents, l'équation relative à la fonction de base $\boldsymbol{F}^{(i)}$ ne fait intervenir en fait que les intégrales sur les mailles qui contiennent le nœud i. On en déduit une méthode pour construire la matrice $[K]$ du système à résoudre :

$$[K]\begin{bmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(N_{inc})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(N_{inc})} \end{bmatrix}$$

Pour chaque maille, on calcule les intégrales de la formulation. Pour chaque $\boldsymbol{F}^{(i)}$ dans la maille, on porte le coefficient de $u^{(j)}$ en ligne i colonne j de $[K]$ en l'ajoutant à ce qui s'y trouve déjà, et on porte en ligne i de $[b]$ le résultat des intégrales second membre toujours en l'ajoutant à ce qui s'y trouve déjà.

Informatiquement, on améliore encore cette méthode en utilisant les particularités de la matrice $[K]$:

- Si la matrice $[K]$ est symétrique, il suffit de n'en calculer (et de ne stocker) que le triangle supérieur (ou inférieur).
- La matrice $[K]$ est creuse : sur la ligne i n'interviennent que les nœuds des mailles contenant le nœud i. On utilise différentes méthodes de stockage pour éviter de remplir la mémoire avec des zéros. Principalement, on trouve :
  - le stockage «morse» : On ne stocke que les termes non nuls ainsi que leur place dans $[K]$, c'est à dire la ligne et la colonne.
  - le stockage «ligne de ciel» : On ne stocke que la partie de ligne de la matrice (ou du triangle, si elle est symétrique), depuis la diagonale jusqu'au dernier terme non nul.
  - le stockage «bande» : On ne stocke que les diagonales non nulles du triangle supérieur (ou inférieur). Le nombre de diagonales est appelé *largeur de bande*.

Il existe des algorithmes de renumérotation des nœuds pour réduire la largeur de bande ou la longueur des lignes de ciel. Le plus utilisé est *l'algorithme de Gibbs* [12]. Il consiste à renuméroter les nœuds pour que les différences de numéros entre deux nœuds voisins soient aussi petites que possible. Les termes non nuls de $[K]$ sont donc groupés autour de la diagonale principale. Cette disposition améliore très sensiblement le temps de résolution du système linéaire pour certains solveurs [13].

Ces choix d'options (type de stockage, renumérotation, et algorithme de résolution) étant souvent proposées dans les logiciels, il est indispensable de les comprendre pour les choisir à bon escient [14].

Remarque :

Les conditions aux limites sont souvent plus complexes que celles qui ont été données dans les exemples proposés précédemment. On peut par exemple imposer des relations entre certains degrés de liberté [15]. Le sous-espace $\mathcal{F}_{ad}$ est alors plus difficile à construire. En fait, on ne le construit pas [16] et on rajoute des équations pour «forcer» les conditions aux limites. Le nombre d'inconnues est donc N_{ddl} et non N_{inc}. Il existe en analyse numérique des méthodes pour résoudre un système algébrique avec des contraintes sur la solution : on peut citer (entre autres) la méthode des multiplicateurs de Lagrange et la méthode de pénalisation [17]. Certains logiciels offrent ces choix en option.

6.6 Quelques indications sur l'intégration numérique

Comme on l'a vu précédemment, la construction des termes de la matrice $[K]$ consiste essentiellement en des calculs d'intégrales sur des éléments. Par exemple, dans le problème thermique, les équations (6.3.2) page 60 montrent qu'on a à calculer les intégrales

$$\int_{\Omega_k} \mathbf{grad} F^{(i)} \overline{\otimes} \sum_{j=1}^{N_{inc}} T^{(j)} \mathbf{grad} F^{(j)}\, dv$$

où les nœuds i et j appartiennent à la maille Ω_k.

On a donc à calculer des intégrales du type

$$\int_{\Omega_k} T^{(j)}\, \mathbf{grad} F^{(i)} \overline{\otimes} \mathbf{grad} F^{(j)}\, dv$$

On peut les ramener à une intégrale sur un élément de référence :

$$\int_{\Omega_r} T^{(j)} \left(\mathbf{grad}\widetilde{f}^{(i)} \overline{\otimes} \mathbf{grad}\tau^{-1}\right) \overline{\otimes} \left(\mathbf{grad}\widetilde{f}^{(j)} \overline{\otimes} \mathbf{grad}\tau^{-1}\right) \;\det[J]\; dx_1 dx_2 dx_3$$

12. C'est un algorithme heuristique. Il diminue la largeur de bande mais il ne fournit pas nécessairement la largeur minimale. Dans les maillages simples, une numérotation manuelle astucieuse peut parfois fournir de meilleurs résultats. L'efficacité de la renumérotation est sans influence sur la précision du résultat, mais pour certains algorithmes de résolution, elle a une forte influence sur le temps de calcul.

13. Le lecteur intéressé est invité à se reporter à un cours d'analyse numérique

14. par exemple, il est inutile de renuméroter si le stockage est de type morse et si le solveur est itératif.

15. Par exemple, pour simuler des nœuds liés à un solide indéformable, ou pour simuler des liaisons complexes.

16. $\mathcal{F}_{ad}$ n' a été introduit dans ce chapitre que pour des commodités de raisonnement.

17. Pour plus de précisions sur la résolution de systèmes algébriques «sous contraintes», se reporter à un cours d'analyse numérique.
En fait, on a à résoudre un système algébrique de N_{ddl} équations, comprenant celles issues de la formulation variationnelle, et celles issues des conditions aux limites. Si on utilise la méthode de Galerkine, le sous-système issu de la formulation variationnelle est symétrique, mais l'ajout des conditions aux limites détruit la symétrie du système complet. C'est cette perte de symétrie qui justifie le traitement spécial des conditions aux limites sous forme de «contraintes». Pour garder la symétrie, on pourrait satisfaire aux conditions aux limites sous forme variationnelle sur des éléments frontière, mais apparemment ce n'est pas l'usage. Cette manière de voir est probablement un héritage des interprétations mécaniques des fonctions test.

où $\widetilde{f}^{(i)}(x_1, x_2, x_3)$ est la fonction d'interpolation sur l'élément de référence obtenue pour une valeur de 1 au nœud i, et 0 pour les autres[18] :

$$\widetilde{f}^{(i)}(x_1, x_2, x_3) = P^{(i)}(x_1, x_2, x_3)$$

Les intégrales à calculer ont donc des intégrandes compliqués (généralement une fraction rationnelle)[19]. Plutôt que de les calculer exactement, on préfère les calculer numériquement.

La méthode la plus souvent utilisée dans les logiciels est la méthode des *points de Gauss* et ses variantes. Elle consiste à évaluer une approximation de l'intégrale à calculer sous la forme

$$\int_{\Omega_r} h(m)\, d\Omega = \sum_{q=1}^{n} w_q h(m_q)$$

où m_q sont des points bien choisis dans l'élément de référence, appelés *points de Gauss*, et w_q des coefficients numériques bien choisis, tels que la formule ci dessus intègre exactement un polynôme de degré n donné[20]. On ne donnera pas ici le détail de la manière dont on choisit les points de Gauss m_q et les valeurs des coefficients w_q. Le lecteur est invité à se référer à un cours d'analyse numérique pour plus de précisions.

La plupart des logiciels proposent des options de choix du nombre de points d'intégration dans les éléments, et ce qui précède n'a pour but que de donner la signification de ces options. Les positions des points de Gauss sont prédéterminées dans les éléments de référence[21].

On doit toutefois signaler un abus de langage couramment fait dans les logiciels : lorsque le nombre de points de Gauss est suffisant pour intégrer exactement la fonction d'interpolation *de référence*, l'intégration est qualifiée d'«exacte»[22]. Lorqu'on utilise un nombre de points de Gauss inférieur, on dit que l'élément est *sous intégré*[23].

6.7 Quelques indications sur les solveurs

Un problème traité par éléments finis se ramène toujours à la résolution de systèmes d'équations algébriques (linéaires ou non, symétriques ou non). Ces systèmes sont généralement de grande taille. Pour les problèmes discrétisés par la méthode de Galerkine, le système d'équations est symétrique.

On ne trouvera pas ici un exposé détaillé des méthodes de résolution, mais comme beaucoup de logiciels proposent des choix sur l'algorithme de résolution, on donne quelques indications pour guider ce choix. Le lecteur insatisfait est invité à se reporter à un cours d'analyse numérique.

18. ATTENTION ! dans la formule qui suit, les numéros de nœuds sont des numéros *dans l'élément de référence.* C'est le logiciel qui assure cette correspondance.

19. On y trouve par exemple $\det[J]^{-1}$ et $\mathbf{grad}\,\tau^{-1}$

20. et évidemment tous les polynômes de degré inférieur à n.

21. La position des points de Gauss dans l'élément réel ou dans l'élément de référence n'est pas toujours bien précisée dans les notices de logiciels ou dans les fichiers de résultats. Ceci peut rendre difficile l'exploitation des résultats.

22. Mais on a vu dans ce qui précède que les intégrales à calculer sont des intégrales des interpolations et de leurs gradients *sur l'élement réel*, dont les intégrandes ne sont pas toujours polynômiaux à cause de la transformation τ. Cette inexactitude disparaitrait si on se passait d'éléments de référence, et si on construisait les fonctions d'interpolation et les points de Gauss sur l'élément réel. On pourrait même se passer de points de Gauss et calculer ces intégrales de polynômes exactement.

23. On utilise souvent cette option pour masquer les anisotropies induites par les fonctions d'interpolation d'un maillage trop régulier avec des fonctions de forme trop simples, ou pour «améliorer la convergence» de problèmes difficiles.

6.7.1 Résolution des systèmes linéaires

On peut distinguer deux classes de méthodes [24] :

- les méthodes *directes* : Elles aboutissent à la solution en un nombre fini d'opérations.
- les méthodes *itératives* : La solution est atteinte en un nombre infini d'opérations convergeant vers la solution. On arrête les itérations lorque qu'on estime qu'on est suffisamment près de la solution. Si on utilise une telle méthode de résolution, le logiciel demande généralement de préciser le critère d'arrêt des itérations.

Les méthodes directes :

Si la matrice n'est pas symétrique, on utilise la méthode d'élimination de Gauss. Si la matrice est symétrique, on utilise généralement une décomposition de Choleski. Différentes versions de ces méthodes sont adaptées sont adaptées aux différents modes de stockage de la matrice $[K]$.

Les méthodes directes sont employées pour des systèmes de taille raisonnable (quelques centaines ou quelques milliers d'inconnues [25]). Le temps de calcul est sensiblement proportionnel au cube du nombre d'inconnues.

Les méthodes itératives :

Que la matrice soit symétrique ou non, on part d'une solution initiale [26] et on l'améliore par étapes successives. Si le système à résoudre est

$$[K]\,[U] = [B]$$

on cherche à diminuer la quantité [27] $||R|| = ||\,[K]\,[U_i] - [B]\,||$, $[U_i]$ étant la solution approchée à l'itération i. Suivant les méthodes, la norme $||\,.\,||$ peut être la norme euclidienne ou la norme du max. La plupart des méthodes sont basées sur une descente de gradient : on fait évoluer les $[U_i]$ dans le sens de $-\mathbf{grad}||R||$. Les différentes variantes se distinguent par la vitesse à laquelle on descend dans cette direction. Le critère d'arrêt est soit $||R|| < \epsilon_1$, soit $||U_j - U_{j-1}|| < \epsilon_2$. Le choix de ϵ_1 ou ϵ_2 dépend de ce qu'on considère comme petit [28].

Les méthodes itératives sont employées pour les systèmes de grande taille, où le temps de calcul serait prohibitif avec une méthode directe. C'est un compromis entre l'exactitude (déterminée par le critère d'arrêt des itérations) et le coût du calcul.

6.7.2 Résolution des systèmes non linéaires

Un système non linéaire peut toujours s'écrire sous la forme

$$[K(U)]\,[U] = [B(U)]$$

On le résout par approximations successives : $[U_{i+1}]$ est solution de

$$[K(U_i)]\,[U_{i+1}] = [B(U_i)]$$

24. Cette distinction dichotomique est à nuancer : La méthode du gradient conjugué aboutit en un nombre fini d'opérations, mais on s'arrête souvent avant la fin.

25. Ces limites sont seulement indicatives. Elles dépendent de la machine dont on dispose.

26. le plus souvent c'est le vectur nul.

27. souvent appelée *résidu*.

28. par exemple, dans un problème de mécanique, ϵ_1, est une force négligeable, ϵ_2 est un déplacement négligeable. Il est donc absurde de fixer un ϵ sans considérer des unités qui ont été utilisées pour définir le problème numérique !

On voit donc que la résolution d'un système non linéaire se ramène à la résolution d'une suite de problèmes linéaires. Différentes variantes existent pour améliorer la convergence [29] ou diminuer le volume des calculs [30]. La convergence de ces méthodes est heuristique et peut poser problème [31]: il faut parfois ajuster des paramètres algorithmiques pour obtenir une solution. D'autre part, la solution d'un système non linéaire n'est pas toujours unique [32] et il n'est pas toujours évident de savoir vers laquelle des solutions l'algorithme a convergé.

6.8 La discrétisation du temps

Tous les exemples traités précédemment étaient des problèmes stationnaires. Dans la plupart des logiciels d'éléments finis, le temps est traité comme un paramètre[33].

On résout donc un problème à chaque pas de temps, en partant d'un instant initial où les dérivées premières et secondes sont supposées connues : ce sont les *conditions initiales*. Ce sont donc des méthodes de différences finies en temps. On peut distinguer deux grandes classes de méthodes :

- Les méthodes explicites : les dérivées premières et secondes déduites du pas précédent sont utilisées pour calculer la valeur suivante du champ inconnu. La stabilité [34] de la solution demande généralement des pas de temps très petits.

  Ces méthodes sont le plus souvent utilisées dans les logiciels de modélisation de crash.
- Les méthodes implicites : les dérivées premières et secondes en fin de pas [35] sont utilisées pour calculer la valeur suivante. La stabilité est meilleure [36], mais la résolution de chaque pas de temps exige un calcul itératif, avec les problèmes associés à tout calcul itératif : les paramètres algorithmiques et le choix de critères d'arrêt.

29. Méthode de Newton-Raphson : on construit une matrice tangente $[K_T]$ pour remplacer $[K]$
30. Par exemple, on peut ne pas mettre à jour la matrice $[K]$ ou $[K_T]$ à toutes les itérations. On évite ainsi des assemblages.
31. Beaucoup d'exposés sur la méthode des éléments finis orientés «mécanique» cherchent à justifier les itérations des algorithmes de résolution de systèmes non linéaires par des interprétations mécaniques : «on charge la structure par incréments de charge», au cours d'un «temps fictif», ou on considère des «lois de comportement tangentes».
32. Elle peut notamment comporter des bifurcations.
33. On pourrait avoir un point de vue différent, mais ce n'est pas l'usage : un problème d'évolution est solution d'une équation différentielle dont les variables sont les variables d'espace et le temps. On peut donc en tirer des formes variationnelles en traitant le temps comme les autres variables. Il reste que pour les problèmes tridimensionnels évolutifs, on ne dispose pas (ou pas encore ...) de mailleur dans un espace à 4 dimensions, et que le nombre d'inconnues des systèmes à résoudre augmente fortement.
34. Ne pas confondre avec l'exactitude de la solution ! La stabilité ne traduit que la sensibilité des solutions approchées à la valeur des pas de temps.
35. ou en milieu de pas, ou en tout autre point, d'où les différentes variantes.
36. Pour certaines variantes, la solution est toujours stable.

Chapitre 7

Le post-traitement

La solution approchée d'un problème d'éléments finis est donc un N_{inc}-uplet de valeurs de ddl aux nœuds du maillage. Pour un problème d'évolution, on a un N_{inc}-uplet pour chaque pas de temps. Le nombre de valeurs dans un résultat de calcul est donc très grand !

Par exemple, dans un problème de mécanique de solide déformable tridimensionnel évolutif, si on a 1000 nœuds, chaque nœud a 3 ddl (les composantes du champ de déplacement), et si on a calculé pour 100 pas de temps, la solution est constituée de 300 000 nombres!

D'autre part, le champ solution n'est pas toujours la grandeur physique pertinente à observer. L'ingénieur a besoin d'observer des grandeurs qui se déduisent de la solution. Par exemple, le champ des déplacements d'un solide déformable n'est pas une information pertinente pour savoir si le solide respecte les critères de résistance.

On a donc besoin :

– de calculer des grandeurs physiques déduites de la solution : ce sont les *grandeurs dérivées.*

– d'outils pour analyser efficacement tous ces nombres.

7.1 Les grandeurs dérivées

7.1.1 Quelques considérations générales

Les grandeurs dérivées dont on a besoin dépendent fortement de la physique du problème traité : Un thermicien est sans doute intéressé par les flux thermiques dans le domaine Ω et à travers ses frontières ; un mécanicien des solides est sans doute intéressé par le champ de tenseur des déformations[1] , par le champ de tenseurs des contraintes[2] (pour vérifier un critère de résistance par exemple), et par les actions de liaison sur la frontière[3]. Il faut donc calculer ces grandeurs dérivées à partir du champ solution approché primaire fourni par les valeurs aux nœuds.

Si le logiciel d'éléments finis est spécialisé dans un certain type de physique, (mécanique des solides, mécanique des fluides, thermique, électromagnétisme ...) il ne propose que les grandeurs dérivées susceptibles d'intéresser les spécialistes de ce domaine, avec un vocabulaire adapté, qui évite à l'utilisateur de se souvenir des définitions des grandeurs qui l'intéressent. C'est le plus souvent le cas.

1. qui se calcule à partir du gradient du champ de déplacement.
2. qui se calcule algébriquement à partir du champ des déformations
3. qui ne sont que le flux du tenseur des contraintes à travers la frontière: $\boldsymbol{\sigma} \overline{\otimes} \boldsymbol{n}$

Cependant, le post-traitement se ramène le plus souvent à des calculs de gradient, de divergence, de rotationnel et de laplacien du champ solution (ou de grandeurs dérivées). On peut donc concevoir un logiciel avec un post-traitement assez général, et ce serait à l'utilisateur de fabriquer les grandeurs dérivées qu'il désire observer. Certains logiciels ont cette prétention, avec plus ou moins de souplesse et un vocabulaire plus ou moins heureux.

Tous les opérateurs différentiels usuels se ramènent à des calculs de gradient. On n'examinera donc que ce cas.

Le gradient d'un champ vectoriel ou tensoriel se ramène au calcul du gradient des composantes quand celles-ci sont données dans un repère orthonormé fixe [4]. On se limite donc au cas d'un champ scalaire. La généralisation se fait sans difficulté.

7.1.2 Évaluation du gradient d'un champ scalaire

La solution approchée primaire est une suite de valeurs aux nœuds $\left\{u^{(1)},\ldots,u^{(Nddl)}\right\}$ qui permet de reconstruire un champ solution approché dans chaque élément. On considère un élément et $\left\{u^{(1)},\ldots,u^{(n)}\right\}$ la suite de ses valeurs aux n nœuds [5] de l'élément.

La valeur du champ sur l'approximation géométrique de l'élément est :

$$\widetilde{F}(M') = \widetilde{f}(m) = \sum_{i=1}^{n} u^{(i)}\, P^{(i)}(m)$$

où les $P^{(i)}(m)$ sont les polynômes de base de l'interpolation sur l'élément de référence.

Les formules donnant le gradient ont été données en section 4.5 page 35 et suivantes.

Ces formules montrent que

- la répartition du gradient à l'intérieur de l'élément n'a pas beaucoup de signification physique : elle ne dépend que du choix des polynômes d'interpolation dans l'élément de référence et de la transformation τ, qui sont tous les deux arbitraires. L'équation différentielle initiale n'est pas strictement respectée à l'intérieur de l'élément.
- le gradient sur l'élément réel est différent du gradient sur l'élément de référence.

D'autre part, si l'utilisation d'éléments conformes garantit bien la continuité C_0 de la solution F, *la continuité du gradient n'est pas assurée.*

Même si les écarts entre la solution approchée F et la solution exacte u sont faibles, on ne peut mathématiquement rien affirmer sur les écarts entre les dérivées. Toutefois, si on postule que la solution exacte est «assez régulière», on peut espérer que ces écarts soient faibles. On cherche donc souvent à donner un gradient plus signifiant :

- Si les intégrales sur les éléments ont été calculées avec des points de Gauss, on peut donner les valeurs du gradient aux points de Gauss [6].
- On peut aussi donner un gradient moyen [7]. Le gradient d'un champ de valeurs d'un ddl est alors décrit par une fonction vectorielle constante par élément.

4. Ce qui est toujours le cas dans les logiciels d'éléments finis, sauf dans les problèmes axisymétriques.
5. Attention, il s'agit maintenant de la numérotation interne à l'élément.
6. Ceci revient à calculer le gradient en des points non nodaux, ce qui pose un problème pour leur représentation graphique, notamment si on veut présenter des isocouleurs. D'autre part, la position des points de Gauss dans l'élément réel n'est pas toujours donnée dans les fichiers résultats !
7. On peut le définir par $\frac{1}{V(\Omega_i)}\int_{\Omega}\mathbf{grad}F ds$, où $V(\Omega_i)$ est le volume, l'aire ou la longueur de l'élément , ou par la moyenne des valeurs aux points de Gauss.

Dans tous les cas, le gradient étant discontinu aux frontières des éléments, on a du mal à définir une valeur du gradient aux nœuds [8]. Si le logiciel donne de telles valeurs, il s'agit d'une moyenne des gradients moyens dans les éléments qui contiennent ce nœud [9]. Toutes ces erreurs restent modérées si les sauts interéléments sont faibles. Dans le cas contraire, il faut considérer ces valeurs avec circonspection et éventuellement refaire un calcul avec un maillage raffiné dans cette région.

7.2 Les outils de visualisation

Étant donné le grand nombre de valeurs à examiner pour analyser une solution et ses ses grandeurs dérivées, la plupart des logiciels proposent des outils de visualisation graphique plus ou moins riches pour représenter les résultats. Principalement on trouve :

des outils de visualisation de champs scalaires : Ce sont normalement des valeurs scalaires (température, énergies, normes de vecteurs, invariants ou valeurs propres de tenseurs). On peut aussi représenter des composantes de vecteurs ou de tenseurs [10].

- Si Ω est un domaine linéique, ces champs scalaires sont normalement représentés par des courbes.
- Si Ω est un domaine surfacique, on utilise un réseau de courbes isocouleurs
- Si Ω est un domaine volumique, on utilise des surfaces isocouleurs. Pour observer l'intérieur d'un champ volumique, beaucoup de logiciels permettent de faire des coupes de manière plus ou moins souple, et certains visualisateurs permettent de jouer sur la transparence pour observer l'intérieur.

des outils de visualisation de champ vectoriel : On représente des vecteurs colinéaires à la grandeur et de longueur proportionnelle à sa norme. Cette représentation n'est vraiment lisible que pour des domaines linéiques ou surfaciques plans. Dans les autres cas, les vecteurs sont vus à l'écran en perspective, ce qui rend difficile l'estimation de leur intensité. Pour paillier partiellement à ce problème, l'intensité du vecteur est à la fois représentée par la longueur (faussée par la projection) et une couleur.

des outils de visualisation de champ tensoriel : On représente les tenseurs symétriques par trois vecteurs dans les directions propres. L'intensité des vecteurs est la valeur propre associée.

A ces outils de visualisation, qui permettent une vue globale des champs, sont généralement associées des recherches de maxima ou de minima pour aider à la recherche de valeurs critiques. Il est parfois indispensable de faire son propre programme d'exploitation des résultats pour évaluer des grandeurs dérivées qui ne sont pas prévues dans le logiciel.

8. Sauf si on a utilisé une formulation à plusieurs champs dans laquelle ce gradient est une inconnue.
9. Cette moyenne peut être pondérée par le volume, l'aire ou la longueur, des éléments qui contiennent le nœud.
10. Bien que des valeurs de composantes dans un système d'axes arbitraire ne présentent en général aucun intérêt !

Annexe A

Formules de transformation d'intégrales de volume

On suppose admis le théorème d'Ostrogradski :

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{V}\ dv = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{V} \overline{\otimes} \boldsymbol{n}\ ds$$

Si f est un champ scalaire et $\boldsymbol{V}$ un champ vectoriel, on vérifie facilement l'identité :

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V} \overline{\otimes} \mathbf{grad}\, f + f \operatorname{div} \boldsymbol{V}$$

et donc

$$\int_{\mathcal{V}} f \operatorname{div} \boldsymbol{V}\ dv = -\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{V} \overline{\otimes} \mathbf{grad}\, f\ dv + \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(f\boldsymbol{V})\ dv$$

En appliquant le théorème d'Ostrogradski,

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} f \operatorname{div} \boldsymbol{V}\ dv = -\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{V} \overline{\otimes} \mathbf{grad}\, f\ dv + \int_{\mathcal{S}} f\, \boldsymbol{V} \overline{\otimes} \boldsymbol{n}\ ds}$$

Pour $\boldsymbol{V} = \mathbf{grad}\, g$ on obtient :

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} f \Delta\, g\ dv = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\, g \overline{\otimes} \mathbf{grad}\, f\ dv + \int_{\mathcal{S}} f\, \mathbf{grad}\, g \overline{\otimes} \boldsymbol{n}\ ds}$$

■

Si $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{W}$ sont deux champs vectoriels, on vérifie facilement l'identité :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W} \overline{\otimes} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V} \overline{\otimes} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{W}$$

et donc

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{V} \overline{\otimes} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{W}\ dv = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{W} \overline{\otimes} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{V}\ dv - \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{W})\ dv$$

En appliquant le théorème d'Ostrogradski,

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{V} \overline{\otimes} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{W}\ dv = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{W} \overline{\otimes} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{V}\ dv - \int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{W}) \overline{\otimes} \boldsymbol{n}\ ds}$$

■

Si $\boldsymbol{V}$ est un champ vectoriel et $\boldsymbol{T}$ un champ tensoriel du second ordre, on vérifie facilement l'identité :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{V}\overline{\otimes}\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{V}\overline{\otimes}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{T} + \mathbf{grad}\,\boldsymbol{V}\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{T}$$

et donc

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{V}\overline{\otimes}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{T}\,dv = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\,\boldsymbol{V}\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{T}\,dv + \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\boldsymbol{V}\overline{\otimes}\boldsymbol{T})\,dv$$

En appliquant le théorème d'Ostrogradski,

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{V}\overline{\otimes}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{T}\,dv = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\,\boldsymbol{V}\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{T}\,dv + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{V}\overline{\otimes}\boldsymbol{T}\overline{\otimes}\boldsymbol{n}\,ds}$$

Pour $\boldsymbol{T} = \mathbf{grad}\boldsymbol{W}$,

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{V}\overline{\otimes}\,\Delta\,\boldsymbol{W}\,dv = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\,\boldsymbol{V}\overline{\overline{\otimes}}\mathbf{grad}\,\boldsymbol{W}\,dv + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{V}\overline{\otimes}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{W}\overline{\otimes}\boldsymbol{n}\,ds}$$

■

Si $\boldsymbol{T}$ est un champ tensoriel du second ordre et $\boldsymbol{S}$ un champ tensoriel du troisième ordre, on vérifie facilement l'identité :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{S}) = \mathbf{grad}\boldsymbol{T}\overline{\overline{\overline{\otimes}}}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{S}$$

et donc

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{S}\,dv = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\boldsymbol{T}\overline{\overline{\overline{\otimes}}}\boldsymbol{S}\,dv + \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{S})\,dv$$

En appliquant le théorème d'Ostrogradski,

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{S}\,dv = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}\overline{\overline{\overline{\otimes}}}\boldsymbol{S}\,dv + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\boldsymbol{S}\overline{\otimes}\boldsymbol{n}\,ds}$$

Pour $\boldsymbol{S} = \mathbf{grad}\boldsymbol{R}$,

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\Delta\,\boldsymbol{R}\,dv = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}\overline{\overline{\overline{\otimes}}}\mathbf{grad}\,\boldsymbol{R}\,dv + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{T}\overline{\overline{\otimes}}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{R}\overline{\otimes}\boldsymbol{n}\,ds}$$

Annexe B

Rappels sur les surfaces

B.1 Caractérisation des surfaces

Une surface $\mathcal{S}$ est un ensemble de points à deux paramètres :

$$\mathcal{S} = \{ \; M \in \mathcal{E}_3 \;\; ; \;\; \boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OM}(x^1, x^2)\}$$

Si on repère les points de l'espace physique tridimensionnel par un système ce coordonnées cartésiennes orthonormées, d'origine O et de base $\{\boldsymbol{E}_k\}$ les coordonnée de M sont :

$$\begin{aligned} X_1 &= \tilde{X}_1(x^1, x^2) \\ X_2 &= \tilde{X}_2(x^1, x^2) \\ X_3 &= \tilde{X}_3(x^1, x^2) \end{aligned}$$

ce qui est la définition paramétrique de $\mathcal{S}$.

Les deux vecteurs de la base naturelle de $\mathcal{S}$ en M sont :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial x^1} \\ \boldsymbol{e}_2 &= \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Ils définissent le plan tangent Π au point M. En général ces deux vecteurs ne sont ni orthogonaux ni normés. Leurs composantes dans $\{\boldsymbol{E}_k\}$ sont :

$$[\boldsymbol{e}_1]_E = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{X}_1}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \tilde{X}_2}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \tilde{X}_3}{\partial x^1} \end{bmatrix} \;\; ; \;\; [\boldsymbol{e}_2]_E = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{X}_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \tilde{X}_2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \tilde{X}_3}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

La normale unitaire à $\mathcal{S}$ en M est $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2}{||\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2||}$.

Dans $\Pi(M)$, on peut définir des vecteurs tangents et des tenseurs tangents.
Si $\boldsymbol{V} = v^\alpha \, \boldsymbol{e}_\alpha$ Les v^α sont appelés composantes contravariantes de $\boldsymbol{V}$.
Les $v_\alpha = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{e}_\alpha$ sont appelés composantes covariantes de $\boldsymbol{V}$.
Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur tangent du second ordre c'est à dire

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}) = t_{\alpha\beta} \, v^\alpha \, w^\beta = t^{\alpha\beta} \, v_\alpha \, w_\beta = t_\alpha{}^\beta \, v^\alpha \, w_\beta = t^\alpha{}_\beta \, v_\alpha \, w^\beta \;\; \in \mathbb{R} \;\; \forall \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W} \in \Pi$$

ses 4 composantes deux fois covariantes sont :

$$t_{\alpha\beta} = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta\right)$$

etc.

On définit le tenseur métrique de surface $\boldsymbol{A}$, du second ordre symétrique :

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}) = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{W} \quad \forall \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W} \in \Pi$$

Ses composantes deux fois covariantes dans la base naturelle sont :

$$[a_{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}$$

Ses composantes deux fois contravariantes dans la base naturelle sont [1]:

$$[a^{\bullet\bullet}] = [a_{\bullet\bullet}]^{-1}$$

Ses composantes mixtes sont la matrice unité.

On définit aussi le tenseur d'orientation de surface $\overline{\boldsymbol{E}}$, du second ordre antisymétrique :

$$\overline{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}) = (\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{n} \quad \forall \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W} \in \Pi$$

Ses composantes covariantes dans la base naturelle sont :

$$\sqrt{a}\,[e_{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

et ses composantes contravariantes dans la base naturelle sont :

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\,[e^{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

où $a = \det\,[a_{\bullet\bullet}]$.
Le produit vectoriel de deux vecteurs tangents est :

$$\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{W} = (\boldsymbol{V} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{E} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{W})\ \boldsymbol{n}$$

On a aussi

$$\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{V} = -\boldsymbol{E} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{V}$$

En étudiant les variations de la normale unitaire $\boldsymbol{n}$ quand M varie sur $\mathcal{S}$, on met en évidence l'existence du tenseur de courbure normale $\boldsymbol{B}$. Ce tenseur est du second ordre, symétrique défini par

$$\boldsymbol{dn} = -\boldsymbol{B} \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{dM}$$

Ses composantes covariantes dans la base naturelle sont :

$$b_{\alpha\beta} = \boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{OM}}{\partial x^\alpha\, \partial x^\beta}$$

Les dérivées des vecteurs de base sont :

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{e}_\gamma + b_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{n}$$

où

$$\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} a^{\gamma\mu} \left(\frac{\partial a_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial a_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right)$$

Propriété : $\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \overline{\Gamma}^\gamma_{\beta\alpha}$.

1. Attention : Cette propriété n'est vraie que pour le tenseur métrique.

B.2 Changements de base

Certains vecteurs ou tenseurs de ce chapitre sont définis *par leurs composantes dans la base naturelle* en M, qui n'est en général ni orthogonale ni normée. On peut donner leurs composantes dans une base fixe orthonormée [2]. Pour les vecteurs et les tenseurs dont la définition est le résultat d'opérations tensorielles, on peut effectuer ces opérations dans toute base. Pour les autres [3], on donne les formules de changement de base :

Si $\boldsymbol{V}$ un vecteur tangent connu par ses composantes contravariantes sur la base naturelle :

$$\boldsymbol{V} = v^{\alpha}\,\boldsymbol{e}_{\alpha}$$

ses composantes dans la base $\boldsymbol{E}_k$ sont :

$$[\boldsymbol{V}]_E = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{e}_1]_E & [\boldsymbol{e}_2]_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}$$

Si $\boldsymbol{V}$ est connu par ses composantes covariantes, ses composantes contravariantes sont :

$$v^{\alpha} = a^{\alpha\beta}\,v_{\beta}$$

soit encore sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} = [a^{\bullet\bullet}] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur du second ordre tangent connu par ses composantes contravariantes, ses composantes dans la base $\boldsymbol{E}_k$ sont la matrice 3×3:

$$[\boldsymbol{T}]_E = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{e}_1]_E & [\boldsymbol{e}_2]_E \end{bmatrix} [t^{\bullet\bullet}] \begin{bmatrix} [\boldsymbol{e}_1]_E & [\boldsymbol{e}_2]_E \end{bmatrix}^T$$

Si $\boldsymbol{T}$ est connu par ses composantes covariantes, ses composantes contravariantes sont :

$$t^{\alpha\beta} = a^{\alpha\mu}\,t_{\mu\nu}\,a^{\nu\beta}$$

soit encore sous forme matricielle :

$$[t^{\bullet\bullet}] = [a^{\bullet\bullet}]\,[t_{\bullet\bullet}]\,[a^{\bullet\bullet}]$$

Pour les tenseurs d'ordre supérieur, on ne peut plus écrire de matrice pour représenter les sommations [4]. On laisse les résultats sous forme de sommations.

B.3 Opérateurs différentiels tangents sur une surface

B.3.1 Gradient surfacique

Si $f(M) = f(x^1, x^2)$ est un champ scalaire défini sur $\mathcal{S}$, le gradient surfacique de f est le vecteur défini par :

$$df = \widetilde{\mathbf{grad}} f \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{dM}$$

2. On l'a déjà fait plus haut pour les vecteurs de la base naturelle.
3. On se limite ici à ce qui est strictement utile.
4. Il faudrait des «matrices cubiques» pour les tenseurs d'ordre 3 !

Ses composantes covariantes dans la base naturelle sont :

$$\left[(\widetilde{\mathbf{grad}} f)_{\bullet}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \frac{\partial f}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

Si $\boldsymbol{V}(M) = \boldsymbol{V}(x^1, x^2)$ est un champ de vecteurs *tangents*, défini sur $\mathcal{S}$, le gradient surfacique de $\boldsymbol{V}$ est le tenseur du second ordre tangent défini par :

$$\mathrm{Tang}\,(\boldsymbol{dV}) = \widetilde{\mathbf{grad}}\boldsymbol{V} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{dM}$$

Ses composantes covariantes dans la base naturelle sont :

$$\left(\widetilde{\mathbf{grad}}\boldsymbol{V}\right)_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\beta} - v_\mu\, \overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}$$

ATTENTION ! Le gradient surfacique ne donne que *la partie tangente* de la variation du champ tangent $\boldsymbol{V}(M)$. Quand la surface a une courbure non nulle, les variations d'un champ de vecteurs tangents ont une partie normale. Si $\boldsymbol{X}$ est un champ de vecteurs non tangent défini sur $\mathcal{S}$, sa dérivée dans la direction unitaire tangente $\boldsymbol{t}$ est :

$$D_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{X} = \widetilde{\mathbf{grad}}\boldsymbol{V} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{t} + (\boldsymbol{V} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{B} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{t})\; \boldsymbol{n}$$

Si $\boldsymbol{T}(M) = \boldsymbol{T}(x^1, x^2)$ est un champ de tenseurs *tangents*, défini sur $\mathcal{S}$, le gradient surfacique de $\boldsymbol{T}$ est le tenseur du troisième ordre tangent défini par :

$$\mathrm{Tang}\,(\boldsymbol{dT}) = \widetilde{\mathbf{grad}}\boldsymbol{T} \overline{\otimes}\, \boldsymbol{dM}$$

Ses composantes covariantes dans la base naturelle sont :

$$\left(\widetilde{\mathbf{grad}}\boldsymbol{T}\right)_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial t_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - t_{\mu\beta}\, \overline{\Gamma}^\mu_{\beta\gamma} - t_{\alpha\mu}\, \overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\gamma}$$

On généralise au gradient de champs tensoriels tangents de tous ordres.

B.3.2 Divergence surfacique

La divergence surfacique d'un champ vectoriel tangent $\boldsymbol{V}(M)$ est le champ scalaire :

$$\widetilde{\mathrm{div}}\boldsymbol{V} = \widetilde{\mathbf{grad}}\boldsymbol{V} \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{A}$$

La divergence surfacique d'un champ tensoriel tangent du second ordre $\boldsymbol{T}(M)$ est le champ vectoriel tangent:

$$\widetilde{\mathbf{div}}\boldsymbol{T} = \widetilde{\mathbf{grad}}\boldsymbol{T} \overline{\overline{\otimes}}\, \boldsymbol{A}$$

On généralise aux tenseurs tangents de tous ordres.

B.3.3 Rotationnel surfacique

Le rotationnel surfacique d'un champ vectoriel tangent $\boldsymbol{V}(M)$ est le champ scalaire :

$$\widetilde{\mathrm{rot}}\boldsymbol{V} = -\widetilde{\mathbf{grad}}\boldsymbol{V} \overline{\overline{\otimes}}\, \overline{\boldsymbol{E}}$$

Si $\boldsymbol{X}(M')$ est un prolongement différentiable de $\boldsymbol{V}(M)$ hors de la surface $\mathcal{S}$, on a la relation:

$$\widetilde{\mathrm{rot}}\boldsymbol{V}(M) = \mathbf{rot}\boldsymbol{X}(M) \cdot \boldsymbol{n}$$

On l'identité suivante

$$\widetilde{\mathrm{rot}}(\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{V}) = \widetilde{\mathrm{div}}\boldsymbol{V} \tag{B.1}$$

B.3.4 Laplacien surfacique

Le laplacien d'un champ scalaire $f(M)$ est le champ scalaire défini par :

$$\widetilde{\Delta} f = \widetilde{\mathrm{div}}\,\widetilde{\mathbf{grad}} f$$

Le laplacien d'un champ vectoriel tangent $\boldsymbol{V}(M)$ est le champ vectoriel tangent défini par :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Delta}} \boldsymbol{V} = \widetilde{\mathbf{div}}\,\widetilde{\mathbf{grad}} \boldsymbol{V}$$

Le laplacien d'un champ tensoriel tangent du second ordre $\boldsymbol{T}(M)$ est le champ tensoriel tangent du second ordre défini par :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Delta}} \boldsymbol{T} = \widetilde{\mathbf{div}}\,\widetilde{\mathbf{grad}} \boldsymbol{T}$$

On généralise aux tenseurs tangents de tous ordres.

B.4 Formules d'analyse sur les surfaces

Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée de la surface, entourant la portion de surface $\mathcal{S}$. On définit sur tout point N de $\mathcal{C}$ le trièdre de Darboux-Ribeaucourt. On note :

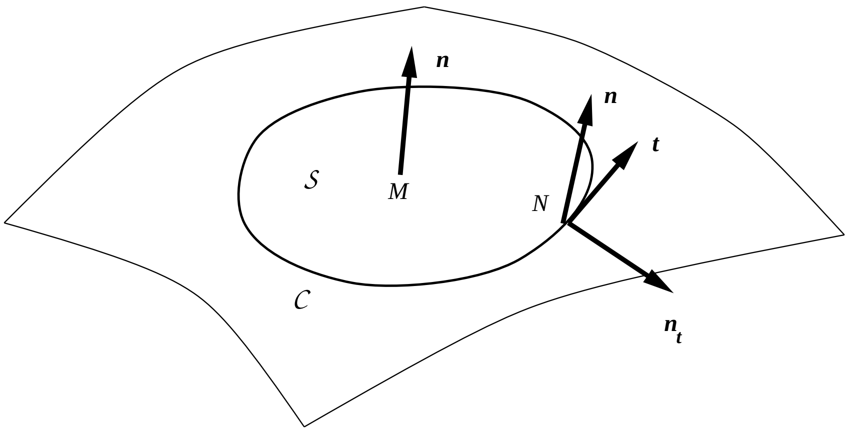

FIG. B.1 – *Domaine surfacique*

$\boldsymbol{n}$ la normale unitaire à $\mathcal{S}$,
$\boldsymbol{n}_t$ la normale unitaire extérieure à $\mathcal{C}$ et *et tangente à* $\mathcal{S}$,
$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{n}_t$ la tangente unitaire à $\mathcal{C}$.
Le trièdre de Darboux-Ribeaucourt $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_t\}$ est orthonormé.

L'élément de surface est :

$$ds = \overline{\boldsymbol{E}}\,(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\ dx^1\,dx^2 = (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{n}, dx^1\,dx^2 = e_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$$

On suppose admise la formule de Stockes classique :

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}\boldsymbol{X}(M') \cdot \boldsymbol{n}\ ds = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{X}(M') \cdot \boldsymbol{t} dl$$

où $\boldsymbol{X}(M')$ est un champ vectoriel défini dans l'espace.

B.4.1 Formule de Stockes pour les surfaces

Il suffit d'appliquer la formule de Stockes classique à un champ vectoriel $\boldsymbol{X}(M')$ qui est le prolongement différentiable d'un champ vectoriel tangent $\boldsymbol{V}$ défini sur la surface. On a alors :

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}\boldsymbol{X}(M')\cdot\boldsymbol{n}\;ds = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{X}(M')\cdot\boldsymbol{t}\;dl$$
$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}\boldsymbol{V}(M)\cdot\boldsymbol{n}\;ds = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{V}(M)\cdot\boldsymbol{t}\;dl$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathrm{rot}}\boldsymbol{V}(M)\;ds = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{V}(M)\cdot\boldsymbol{t}\;dl}$$

B.4.2 Formule d'Ostrogradski pour les champs vectoriels tangents

Il suffit d'appliquer la formule de Stockes au vecteur tangent $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{V}$. on établit facilement que

$$\widetilde{\mathrm{rot}}\boldsymbol{W}(M) = \widetilde{\mathrm{div}}\boldsymbol{V}(M)$$

On obtient alors:

$$\boxed{\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathrm{div}}\boldsymbol{V}(M)\;ds = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{V}(M)\cdot\boldsymbol{n}_t\;dl}$$

B.4.3 Formule d'Ostrogradski pour les champs tensoriels tangents du second ordre

Soit $\boldsymbol{T}$ un tenseur de surface du second ordre. On se propose de calculer le «flux» de $\boldsymbol{T}$ à travers la courbe $\mathcal{C}$: $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t\;dl$. C'est un vecteur non tangent. Pour calculer cette intégrale vectorielle on la projette sur la base fixe $\boldsymbol{E}_k$.

$$\boldsymbol{E}_k\,\overline{\otimes}\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t\;dl = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{E}_k\cdot\left(\boldsymbol{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t\right)\;dl$$

En développant les calculs en composantes sur la base naturelle on trouve :

$$\boldsymbol{E}_k\,\overline{\otimes}\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t\;dl = \boldsymbol{E}_k\,\overline{\otimes}\int_{\mathcal{S}}\left(\widetilde{\mathrm{div}}\boldsymbol{T} + \left(\boldsymbol{B}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{T}\right)\;\boldsymbol{n}\right)\;ds$$

(La courbure apparaît car on a à dériver les vecteurs de base.)
et donc :

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t\;dl = \int_{\mathcal{S}}\left(\widetilde{\mathrm{div}}\boldsymbol{T} + \left(\boldsymbol{B}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{T}\right)\;\boldsymbol{n}\right)\;ds}$$

B.5 Transformations d'intégrales

Dans les formules qui suivent :

- f et g sont des champs scalaires définis sur $\mathcal{S}$,

- $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{W}$ sont des champs vectoriels *tridimensionnels* définis sur $\mathcal{S}$,
- $\overline{\boldsymbol{V}}$ et $\overline{\boldsymbol{W}}$ sont les parties tangentes de $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{W}$,
- $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{R}$ sont des champs tensoriels *tridimensionnels* du second ordre définis sur $\mathcal{S}$,
- $\overline{\boldsymbol{T}}$ et $\overline{\boldsymbol{R}}$ ont les parties tangentes de $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{R}$,
- $\overline{\boldsymbol{S}}$ est un champ de tenseur de surface du troisième ordre.

On vérifie facilement l'identité :

$$\widetilde{\mathrm{div}}(f\,\overline{\boldsymbol{V}}) = \overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\otimes}\,\widetilde{\mathbf{grad}}f + f\,\widetilde{\mathrm{div}}\,\overline{\boldsymbol{V}}$$

et donc

$$\int_{\mathcal{S}} f\,\widetilde{\mathrm{div}}\,\overline{\boldsymbol{V}}\;ds = -\int_{\mathcal{S}} \overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\otimes}\,\widetilde{\mathbf{grad}}f\;ds + \int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathrm{div}}(f\,\overline{\boldsymbol{V}})\;ds$$

en appliquant le théorème d'Ostrogradski pour les champs vectoriels tangents :

$$\int_{\mathcal{S}} f\,\widetilde{\mathrm{div}}\,\overline{\boldsymbol{V}}\;ds = -\int_{\mathcal{S}} \overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\otimes}\,\widetilde{\mathbf{grad}}f\;ds + \int_{\mathcal{C}} f\,\overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t\;dl$$

soit encore :

$$\boxed{\int_{\mathcal{S}} f\,\widetilde{\mathrm{div}}\,\overline{\boldsymbol{V}}\;ds = -\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{V}\cdot\widetilde{\mathbf{grad}}f\;ds + \int_{\mathcal{C}} f\,\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_t\;dl}$$

Pour $\boldsymbol{V} = \widetilde{\mathbf{grad}}g$, on obtient :

$$\boxed{\int_{\mathcal{S}} f\,\widetilde{\Delta}g\;ds = -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}}g\,\overline{\otimes}\,\widetilde{\mathbf{grad}}f\;ds + \int_{\mathcal{C}} f\,\widetilde{\mathbf{grad}}g\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t\;dl}$$

■

On vérifie facilement l'identité :

$$\widetilde{\mathrm{div}}(\overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\otimes}\,\overline{\boldsymbol{T}}) = \overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\otimes}\,\widetilde{\mathbf{div}}\,\overline{\boldsymbol{T}} + \widetilde{\mathbf{grad}}\overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\boldsymbol{T}}$$

et donc

$$\int_{\mathcal{S}} \overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\otimes}\,\widetilde{\mathbf{div}}\,\overline{\boldsymbol{T}}\;ds = -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}}\,\overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\boldsymbol{T}}\;ds + \int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathrm{div}}(\overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\otimes}\,\overline{\boldsymbol{T}})\;ds$$

en appliquant le théorème d'Ostrogradski pour les champs vectoriels tangents :

$$\int_{\mathcal{S}} \overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\otimes}\,\widetilde{\mathbf{div}}\,\overline{\boldsymbol{T}}\;ds = -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}}\,\overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\boldsymbol{T}}\;ds + \int_{\mathcal{C}} \overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\otimes}\,\overline{\boldsymbol{T}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t\;dl$$

soit encore :

$$\boxed{\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{V}\cdot\widetilde{\mathbf{div}}\,\overline{\boldsymbol{T}}\;ds = -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}}\,\overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\boldsymbol{T}\;ds + \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{T}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t)\;dl}$$

Pour $\boldsymbol{T} = \widetilde{\mathbf{grad}}\,\overline{\boldsymbol{W}}$, on obtient :

$$\boxed{\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{V}\cdot\widetilde{\Delta}\,\overline{\boldsymbol{W}}\;ds = -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}}\,\overline{\boldsymbol{V}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\widetilde{\mathbf{grad}}\,\overline{\boldsymbol{W}}\;ds + \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{V}\cdot\left(\widetilde{\mathbf{grad}}\,\overline{\boldsymbol{W}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t\right)\;dl}$$

■

0n vérifie facilement l'identité :

$$\widetilde{\mathbf{div}}(\overline{\boldsymbol{T}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\boldsymbol{S}}) = \overline{\boldsymbol{T}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\widetilde{\mathbf{div}}\,\overline{\boldsymbol{S}} + \widetilde{\mathbf{grad}}\,\overline{\boldsymbol{T}}\,\overline{\overline{\overline{\otimes}}}\,\overline{\boldsymbol{S}}$$

et donc

$$\int_{\mathcal{S}} \overline{\boldsymbol{T}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\widetilde{\mathbf{div}}\,\overline{\boldsymbol{S}}\;ds = -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}}\,\overline{\boldsymbol{T}}\,\overline{\overline{\overline{\otimes}}}\,\overline{\boldsymbol{S}}\;ds + \int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{div}}(\overline{\boldsymbol{T}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\boldsymbol{S}})\;ds$$

en appliquant le théorème d'Ostrogradski pour les champs vectoriels tangents :

$$\boxed{\int_{\mathcal{S}} \overline{\boldsymbol{T}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\widetilde{\mathbf{div}}\,\overline{\boldsymbol{S}}\;ds = -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}}\,\overline{\boldsymbol{T}}\,\overline{\overline{\overline{\otimes}}}\,\overline{\boldsymbol{S}}\;ds + \int_{\mathcal{C}} \overline{\boldsymbol{T}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\overline{\boldsymbol{S}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t\;dl}$$

Pour $\overline{\boldsymbol{S}} = \widetilde{\mathbf{grad}}\,\overline{\boldsymbol{R}}$, on obtient :

$$\boxed{\int_{\mathcal{S}} \overline{\boldsymbol{T}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}\,\overline{\boldsymbol{R}}\;ds = -\int_{\mathcal{S}} \widetilde{\mathbf{grad}}\,\overline{\boldsymbol{T}}\,\overline{\overline{\overline{\otimes}}}\,\widetilde{\mathbf{grad}}\,\overline{\boldsymbol{R}}\;ds + \int_{\mathcal{C}} \overline{\boldsymbol{T}}\,\overline{\overline{\otimes}}\,\widetilde{\mathbf{grad}}\,\overline{\boldsymbol{R}}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{n}_t\;dl}$$

Table des matières